MULTZOEN OINARRIAK

MATEMATIKA

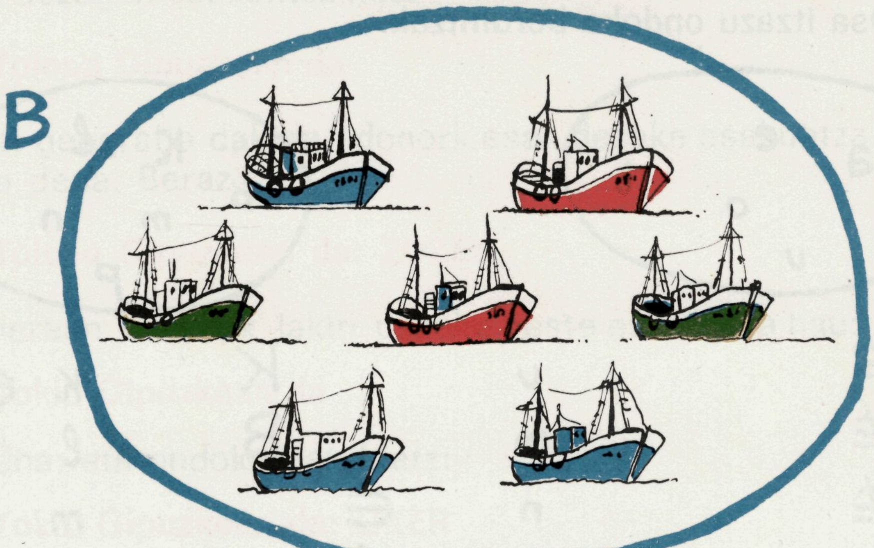
LAUGARREN MAILA

1 — MULTZOEN TEORI-OINARRIAK

Aurreko urteetan ikusiak ditugu ondoko ideiarik gehienak; baina, aurrerago baino lehenago, hitz gutxitan gogoraztea on izango da.

1.1 — MULTZOA zer den badakigu. Funtsezko ideia denez, definizioz baino errazkiago uler daiteke multzoaren kakoa etsenplu bidez.

a — Eman dezagun euskal kai batetan dagoen arrain-ontzien sorta: «Mari Belen», «Sollube», «Ekaitza», «Matxitxako», «Gaztelugatxe», «Bizkaitxiki» eta «Antton». Zazpi ontzi, beraz, guztira. Zazpi ontzi horiek **B multzoa** osatzen dute:



Ontzi horiek guztiak B multzoaren **barruan** dira. Diagrama edo adierazpide horri, dakikezunez, **Euler-Venn-en Diagrama** deritza: elementuen irudiak soka batez bilduta agertzen dira.

Elementu horiek (itsasontzi horiek kasu honetan) multzo horretako ELEMENTU direla aditzera emateko, ondoko hau idazten dugu:

«Mari Belen» $\in$ B
«Sollube» $\in$ B
«Antton» $\in$ B

Multzo hori, bestetan ikasia dugunez, beste modu batez ere (giltzak baliatuz, alegia) adieraz daiteke:

B = { Mari Belen, Sollube, Ekaitza, Matxitxako, Gaztelugatxe, Bizkaitxiki, Antton }

Ontzion sortari MULTZO esaten zaio, eta sortako ontzi bakoitzari B multzoko ELEMENTU.

b — Argi dezagun ideia hau beste adibide batez.

Eman dezagun berebil-marka ilara hau: Ford, Peugeot, Volvo, Renault, Fiat, Chrysler, Mercedes. Marka sorta horrek M multzoa osatzen du:

M = { Ford, Peugeot, Volvo, Renault, Fiat, Chrysler, Mercedes }

Multzoaren BARRUAN dago Ford marka; beraz:

Ford $\in$ M (= Ford **M-koa da)**

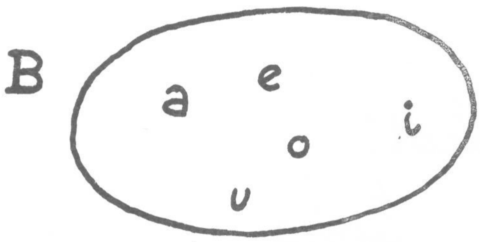
eta Mercedes marka, era berean, barruan ere bai:

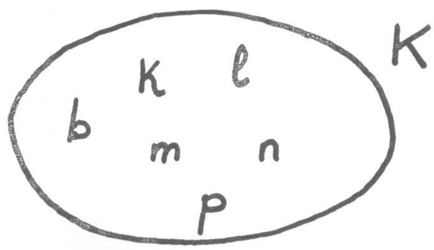
Mercedes $\in$ M (= Mercedes **M-koa da**)

Volkswagen, berriz, ez da multzokoa; eta hau honela idatziko dugu:

Volkswagen $\notin$ M (= Volkswagen **ez da M-koa**)

d — Osa itzazu ondoko berdintzak:

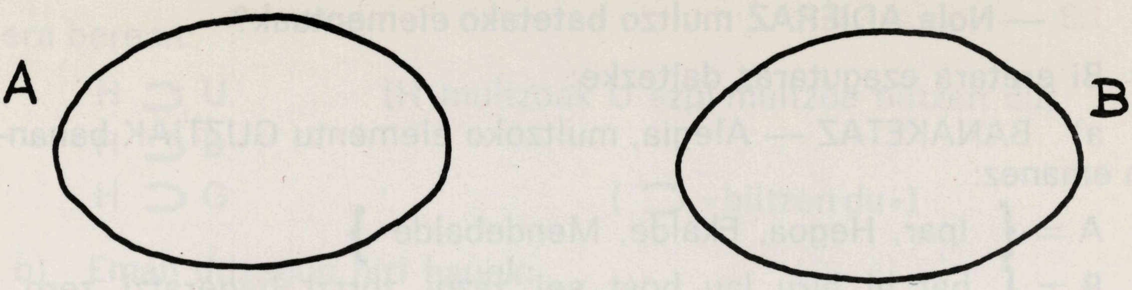




$a \in$	$u \quad\quad K$	$k \notin$
$a \notin$	$m \quad\quad B$	$l \quad\quad K$
$o \notin$	$n \in$	$m \quad\quad K$
$a \quad\quad B$	$p \notin$	$l \notin$

e — Bil itzazu, Euler-Venn-en diagrama baten arabera, ondoko berdintza eta desberdintza hauek:

$a \notin B$	$h \notin B$	$a \in A$
$b \notin A$	$i \notin A$	$b \in B$
$d \in B$	$j \in B$	$h \in A$
$f \in B$	$k \in A$	$l \in A$
$g \in A$	$l \notin B$	$i \in B$



Idatz itzazu A eta B multzoon elementuak giltzen artean:

A = { }

B = { }

f — Asma itzazu zerorrek hiru multzo, eta idatz itzazu dagozkien berdintzak $\in$ ikurra baliatuz.

1.2. — PROPOSAMENDU-aren ideia eta multzoena oso loturik daude. Eman dezagun esakuntza hau:

Tolosa Gipuzkoan da

Euskal geografia dakien edonork esan dezake esakuntza horren esanahia egia dena. Beraz,

Tolosa Gipuzkoan da: ZUZEN

Era berean edonork jakin dezake beste esakuntza hau:

Tokio Gipuzkoan da

egia ez dena; eta ondoko hau idatz:

Tokio Gipuzkoan da: OKER

Esakuntza hori EDOZEIN HIRIRI erants dakiokeenez gero, hau idatz genezake:

X GIPUZKOAN DA

«X» horri, aldatu egiten delako, ALDAKI deritza; eta X-en ordez edozein hiri jar daiteke:

X = Tolosa, Tokio, Ankara, Azpeitia, Milano...

Esakuntza hori ZUZEN egiten duten hiriek MULTZO bat osatzen dute. OKER egiten dutenak, berriz, **ez dira** multzokoak.

PROPOSAMENDU batetan, halere, hautua bikuna da: ala EGIA da sortu den esakuntza, ala EZ DA EGIA. Bide erdian gelditzerik ez dago proposamenduetan. Baldintza hori (bai ala ez-koa) beharrezkoa da PROPOSAMENDU aipa ahal izateko.

Alderantziz, hortaz:

Nor jaioko da 2026-an?

esakuntza ez da proposamendu bat, «bai/ez» edo ZUZEN/OKER bikuntzarik sortzen ez baitu.

1.3 — Nola ADIERAZ multzo batetako elementuak?

Bi eratara ezagutaraz daitezke:

a) BANAKETAZ — Alegia, multzoko elementu GUZTIAK banan-banan emanez:

A = { Ipar, Hegoa, Ekalde, Mendebalde }

B = { bat, bi, hiru, lau, bost, sei, zazpi, zortzi, bederatzi, zero }

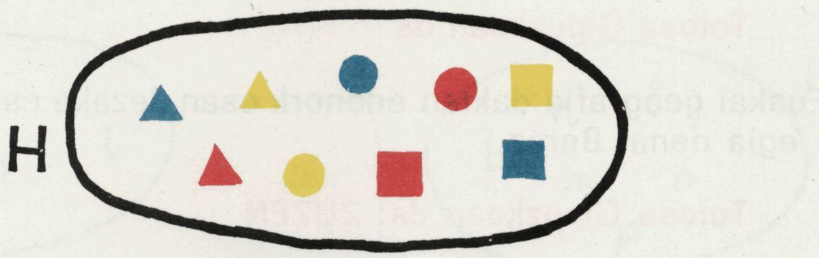
b) EZAGUPIDEZ — Alegia, multzoko elementu guztien EZAGUGARRIA emanez:

A = { lau puntu kardinalak }

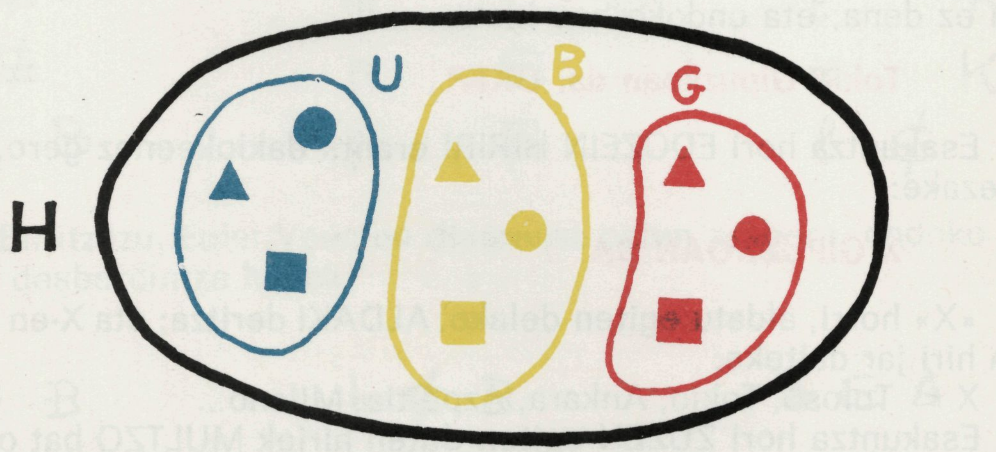
B = { oinarrizko hamar lumeroak }

1.4. — AZPI-MULTZOAK

a) Har dezagun gogoan multzo hau:



H-ko elementuak koloreen arabera taxutzen baldin baditugu, hau dugu:



Baditugu, beraz, **H-ren barruan,** U, B eta G multzoak. H-ren parte diren multzoki hauei AZPI-MULTZO deritzaie. Ageri denez, MULTZOAK dira-izan; baina besteen barruan edo menpean daudelako, «MENPEKOAK» direla esan daiteke; eta hau idatz:

$U \subset H$ (= U, H-ren azpi-multzoa da)

$B \subset H$

$G \subset H$ ($\subset$ «bildua»)

eta era berean:

$H \supset U$ (H multzoak U azpi-multzoa biltzen du)

$H \supset B$

$H \supset G$ ($\supset$ «biltzen du»)

b) Eman ditzagun hiri hauek:

H = { London, Berlin, Stuttgart, Donostia, Cambridge, Bonn, Bilbo, Lyon }

Europako hiri horiek H multzoa osatzen dute.

Baina, multzoaren barruan, bigarren mailako taxuketa hau egin daiteke:

B = { London, Cambridge }

G = { Berlin, Bonn, Stuttgart }

E = { Donostia, Bilbo }

F = { Lyon }

B, G, E eta F, H multzoaren AZPI-MULTZO dira; eta, hortaz:

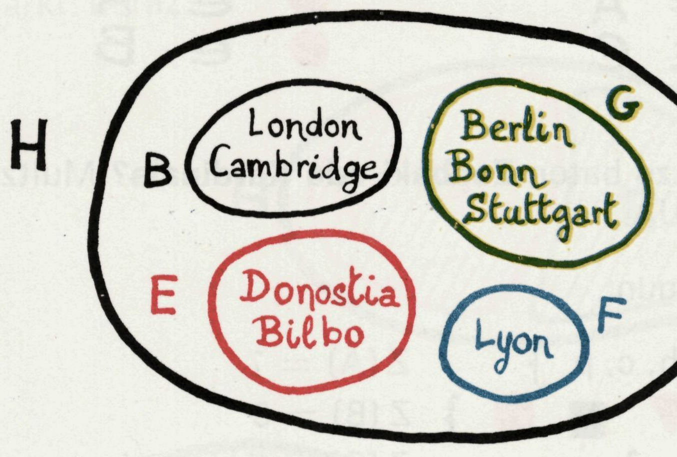
$B \subset H$ (= B, **H-an bildua da**)

$G \subset H$

$E \subset H$

$F \subset H$

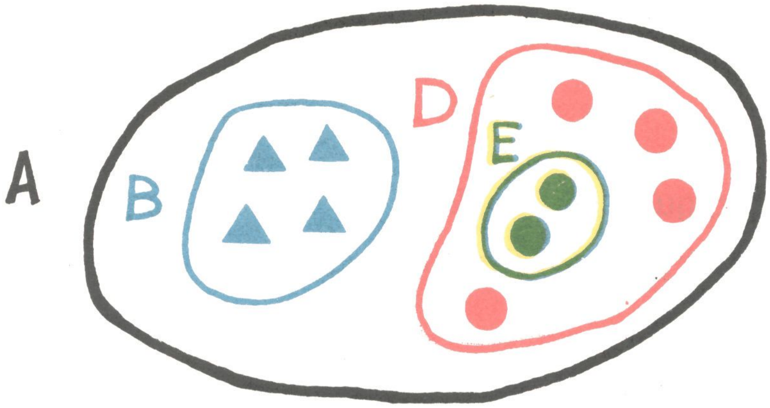
Venn-en marrazkia eginez gero:



d) Zure eskolakideek multzo bat osatzen dute. Nori bere sortreguna galdetu ondoren, idatz itzazu haren barruan bi menpeko multzo: bata zu baino **gazteago** direnek osa bezate, eta **zaharragoek** bestea.

e) Asma itzazu zerorrek multzo eta azpi-multzo batzu.

f) Begira zazu ondoko marrazki hau:



Iker itzazu ondoko berdintzak:

$A \subset B$	$D \supset E$
$E \subset D$	$E \not\subset D$
$D \subset B$	$D \supset B$
$A \supset D$	$E \not\subset B$

baita ondoko beste hauek ere:

▲ $\in A$	● $\in A$
● $\in D$	● $\notin B$
▲ $\notin A$	● $\in A$
● $\in C$	● $\in B$

1.5.— Zer da multzo baten **Zenbaki edo Kardinala?** Multzo horretako elementuen KOPURUA.

Eman dezagun:

$A = \{$ a, d, g, b, h, c, p $\}$ $\quad Z(A) = 7$
$B = \{$ ▲ ● ▼ ■ ● $\}$ $\quad Z(B) = 5$
$D = \{$ a, e, i, o, u $\}$ $\quad Z(D) = 5$

Bi multzoen zenbakia berbera denean ZENBAKIDE direla esaten da. Goiko B eta D multzoak, esate baterako, ZENBAKIDE dira; eta haien zenbakia **5** da.

Multzo batetan elementurik batere ez dagoenean, multzo HUTSA dela esaten da; eta haren zenbakia ZERO da. Esate baterako:

M = { 4.000 metro gora duten euskal mendiak }

Euskal Herrian 4.000 metrotako mendirik ez dagoenez gero, hau idatz daiteke:

M = ∅ eta, hortaz: Z (M) = 0

1.6.— Goazen orain MULTZO OSAKINA zer den aztertzera.

Eman dezagun H multzo hau:

H = { a, l, p, e, m, b, i, r, o, s, f, u }

Idatz dezagun orain **bokaleen** azpi-multzoa:

B = { a, e, i, o, u }

Kontsonanteez beste multzo bat egin badezagu, hau dukegu:

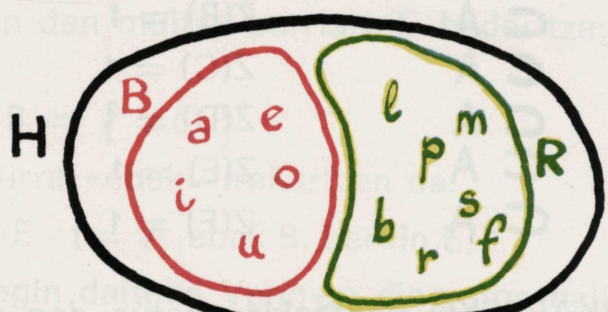
R = { l, p, m, b, r, s, f, }

B eta R elkartuz, H dugu. Beraz, lehenagoko ikastaroetan ikasi dugunez:

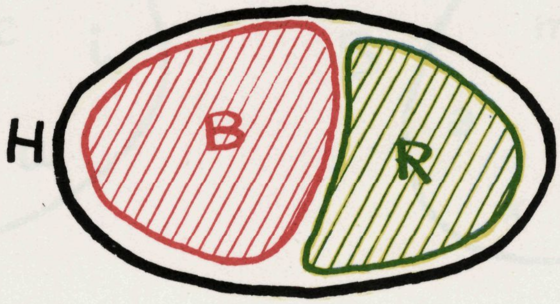
B ∪ R = H (= B bil R, berdin H)

Multzo bati buruz bi azpi-multzo nagusiaren osatzaile gertatzen direlarik, menpeko OSAKINAK direla esan ohi da.

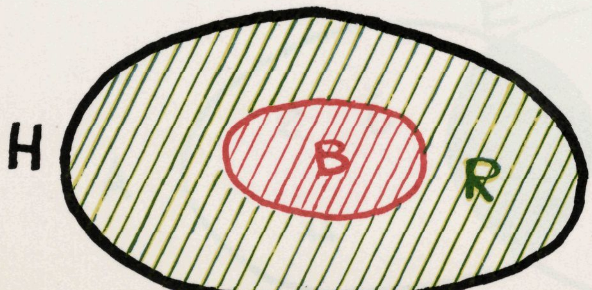
Eta Venn-en marrazkiaz:



Eskuarki, beraz:



edo-ta:



Biak dira elkarren OSAKIN H-multzoari buruz

b) Eman dezagun adiskide talde hau:

A = { Joanes, Kepa, Antton, Piarres, Mikel }

Eta har dezagun gogoan B menpeko talde hau:

B = { Antton, Mikel }

Idatz ezazu D, B-ren osakina:

D = {   }

d) Bi azpi-multzo, beti ahal dira elkarrekiko OSAKIN? Zergatik?

e) Azal ezazu berdintza hau:

$$A \cup \emptyset = A$$

f) Multzo batetako elementu **bakoitzean** elementu bakarreko multzo bana ikus daiteke:

A = { a, b, c, d, e }		Z(A) = 5
B = { a }	⊂ A	Z(B) = 1
C = { b }	⊂ A	Z(C) = 1
D = { c }	⊂ A	Z(D) = 1
E = { d }	⊂ A	Z(E) = 1
F = { e }	⊂ A	Z(F) = 1

Elementu BAKARREKO multzokiz osatua den multzoari FAMILIA deritza.

2 — EBAKETA ETA BILKETA

2.1. — EBAKETA zer den aurreko urteetan ere ikasia dugu.

Eman ditzagun bi multzo hauek:

A = { a, e, i, o, u }
B = { a, p, m, t, o, x, }

Zein dira **batera** A-ko **eta** B-ko elementuak?

Idatz ditzagun elementuei buruzko berdintzak:

$a \in A$	$a \in B$
$e \in A$	$p \in B$
$i \in A$	$m \in B$
$o \in A$	$t \in B$
$u \in A$	$o \in B$
	$x \in B$

Bi berdintza ilara horietan **batera** dauden elementuak hauek dira:
{ a, o }

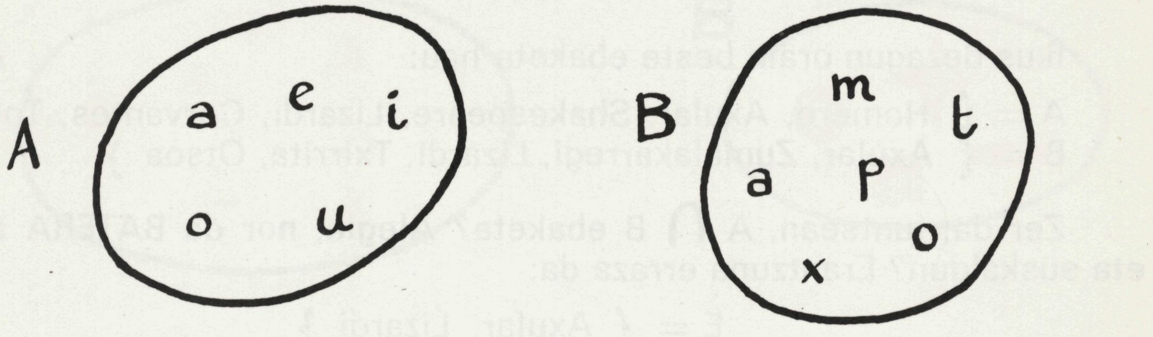
Ebaketaz sortzen den multzo berriari E baderitzagu, hau idatziko dugu:

$$E = A \cap B = \{ a, o \}$$

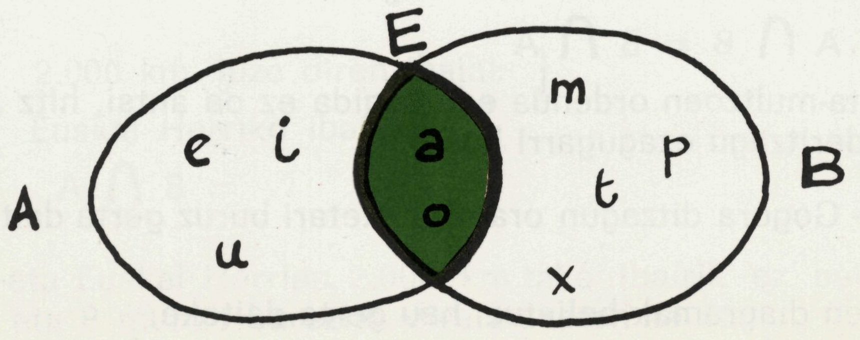
$\cap$ ikurra «ebak» irakurtzen da.

$A \cap B = E$ (= A ebak B, berdin E)

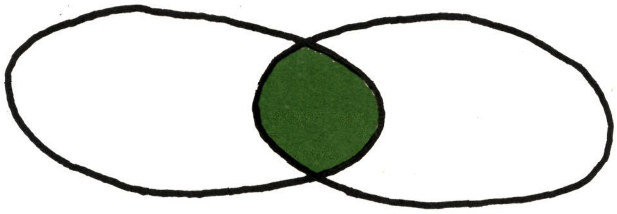
— Gauza bera egin daiteke Venn-en diagrama baliatuz:



Beraz:

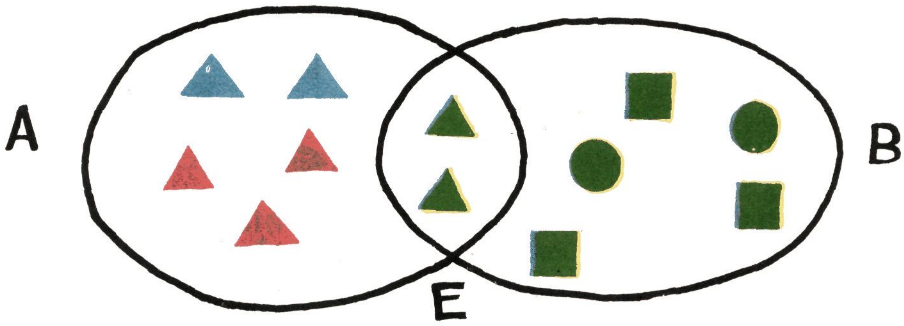


Eta eskuarki, ebaketa batetan:



Ebaketa-multzoa ez baita multzo hutsa (alegia, elementu bat edo gehiago **batera** A-koak **eta** B-koak direnez gero) ebaketan erabili diren multzoak **bereziak ez direla** esaten dugu.

Azter ditzagun beste ebaketa batzu:



A eta B multzoak ezagupidez ematen baditugu:

A = { edozein koloretako trianguluak }

B = { eite berdeak }

A $\cap$ B = E ebaketa-multzoa zer ote da? BATERA triangulu **eta** berde diren trianguluen multzoa.

Ikus dezagun orain beste ebaketa hau:

A = { Homero, Axular, Shakespeare, Lizardi, Cervantes, Tolstoi }
B = { Axular, Zumalakarregi, Lizardi, Txirrita, Otsoa }

Zer da, funtsean, A $\cap$ B ebaketa? Alegia, nor da BATERA idazle **eta** euskaldun? Erantzuna erraza da:

E = { Axular, Lizardi }

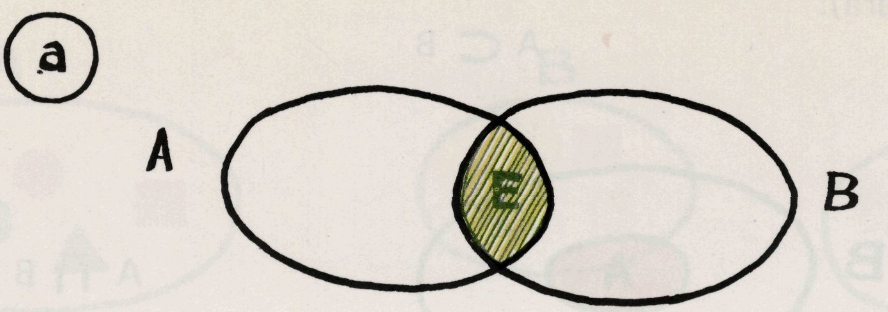
2.2. — Adibide horietan ikusi dugunez:

$$A \cap B = B \cap A$$

Ebaketa-multzoen ordenua edo segida ez da antsi, hitz batez («truka-legea» deritzagu ezagugarri horri).

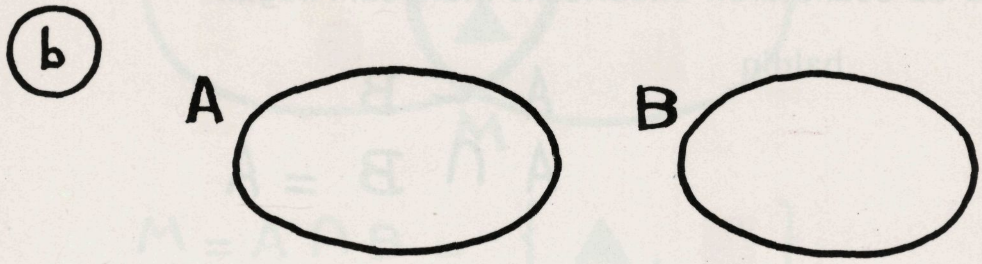
2.3. — Gogora ditzagun orain ebaketari buruz gerta daitezkeen hiru kasoak.

Venn-en diagramak baliatuz, hau gerta daiteke:



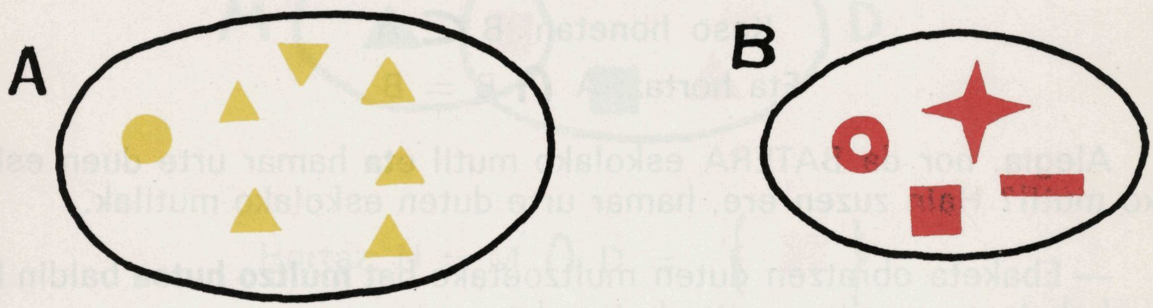
Hauxe da kaso normala: A eta B bereziak ez izatea. Elementu **batzuek** (batek, bigak, hiruk...) betetzen dituzte ebaketaren bi berdintzak:

$$a \in A \text{ eta batera } a \in B$$



Kaso hauetan ebaketa-multzoa **hutsa** da: $\emptyset$. Ez dago, hitz batez, **batera** A-koa **eta** B-koa den elementurik batere.

Esate baterako:



Edo-ta beste kaso hau:

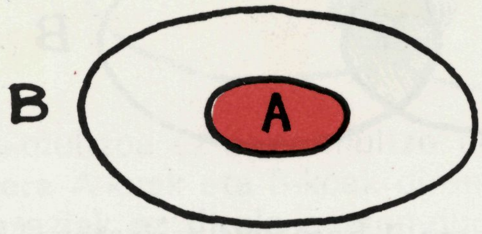
A = { 2.000 km. luze diren ibaiak }
B = { Euskal Herriko ibaiak }

$$A \cap B = \emptyset$$

Zeren-eta Euskal Herrian 2.000 km.tako ibairik ez baitago. Kaso hauetan A eta B multzo **bereziak** direla esaten da.

d) Multzoetako bat bestearen barruan dago (azpi-multzo da bestearen arabera):

$$A \subset B$$



$A \cap B = A$

Multzo bat eta honen azpi-multzo bat ebakitzen direlarik azpi-multzoa bera da ebaketaren ondoriozko multzoa. Alegia:

baldin $A \subset B$

$$A \cap B = A$$

Esate baterako:

$A = \{$ eskolako mutilak $\}$

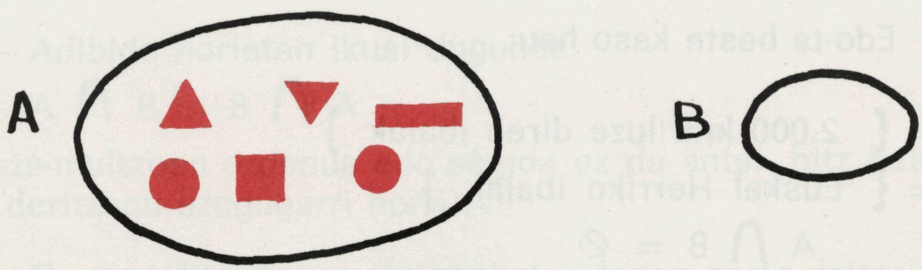
$B = \{$ 10 urte duten eskolako mutilak $\}$

Kaso honetan, $B \subset A$

Eta hortaz, $A \cap B = B$

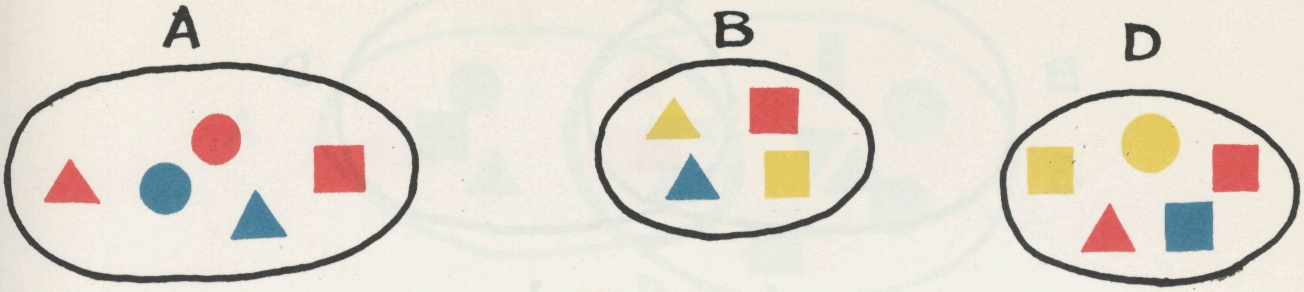
Alegia, nor da BATERA eskolako mutil **eta** hamar urte duen eskolako mutil? Hain zuzen ere, hamar urte duten eskolako mutilak.

— Ebaketa obratzen duten multzoetako bat **multzo hutsa** baldin bada, ebaketaren emaitza multzo hutsa da:

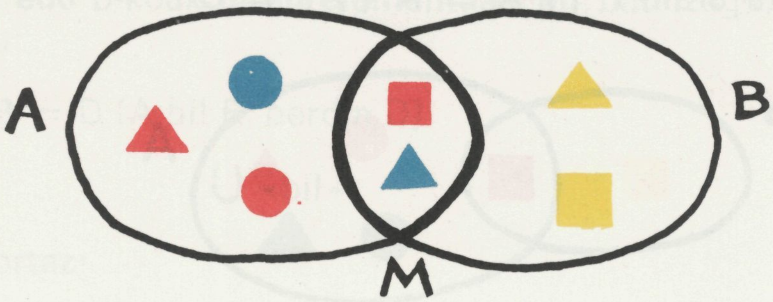


Beraz: $A \cap \varnothing = \varnothing$

2.4. — Har ditzagun orain hiru multzo:

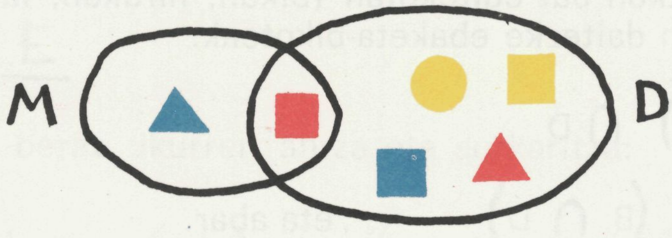


eta egin dezagun lehendabizi A $\cap$ B ebaketa:



$M = A \cap B =$ 

eta orain M $\cap$ D

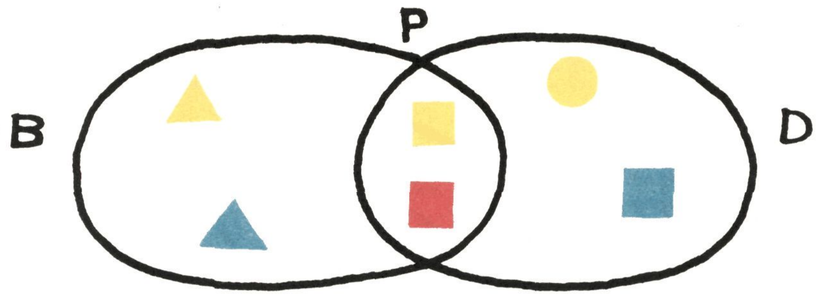


Hortaz: $N = M \cap D =$ 

$(A \cap B) \cap D =$ 

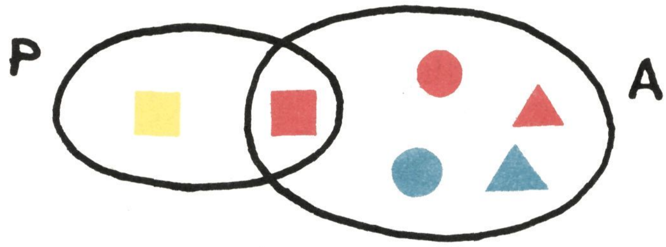
Has gaitezen orain atzekaldetik:

$B \cap D = P$



$P = B \cap D = \{ ■ , ■ \}$

Eta orain $P \cap A = A \cap P = Q$



$Q = (B \cap D) \cap A = A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D =$

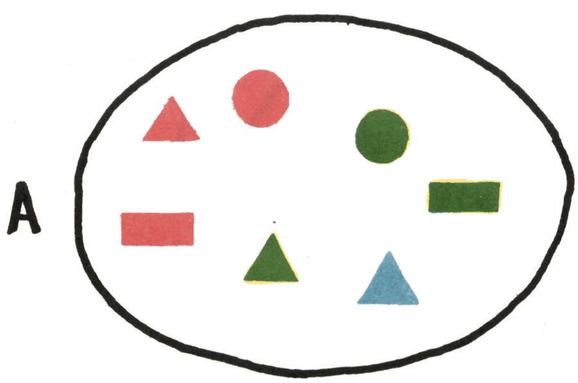
$= \{ ■ \}$ (elkar-legea)

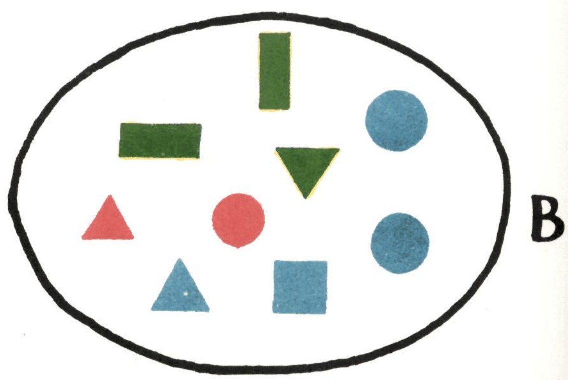
Ebaketa anizkun bat egitekotan (bikun, hirukun, laukun... anizkun) **nahi bezala** ezkon daitezke ebaketa-bikoteak:

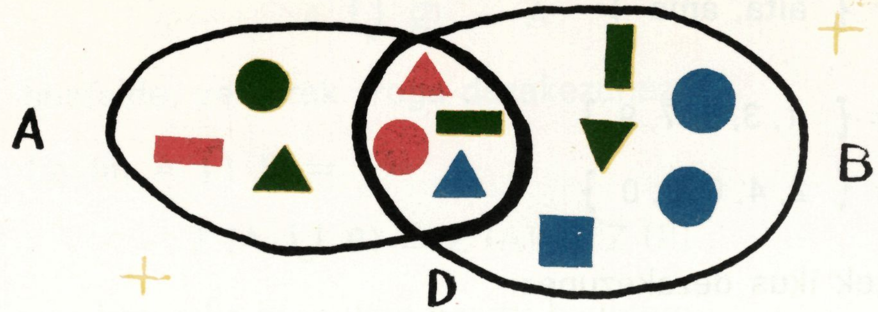
$(A \cap B) \cap D$

$A \cap (B \cap D)$, eta abar.

2.5. — Har ditzagun orain gogotan bil multzo hauek:







A-koak **edo** B-koak diren elementuak bil baditzagu, D bilketa-multzoa dukegu:

$A \cup B = D$ (A bil B, berdin D)

$\cup$ «bil»

Hortaz:

$\cap$ EBAKETAN

Baldin $a \in A$
eta $a \in B$

$a \in E$

$\cup$ BILKETAN

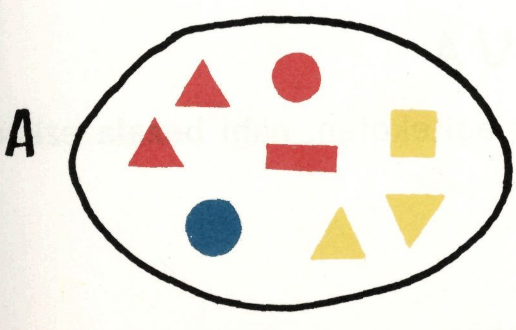
Baldin $a \in A$
edo $a \in B$

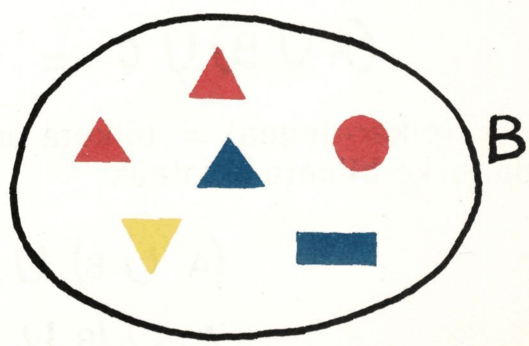
$a \in D$

Horretatik, beraz, ikurren antza eta aurkaritza:

$\cap$ ebak (eta) // $\cup$ bil (edo)

2.6. — Egizkitzu ondoko multzoen ebaketa eta bilketa:





$$\begin{cases} A = \{ \text{aita, ama, seme-alabak} \} \\ B = \{ \text{aita, ama} \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \} \\ B = \{ 2, 4, 6, 8, 0 \} \end{cases}$$

Zerorrek ikus dezakezunez:

$A \cup B = B \cup A$ (truka-legea)

2.7. — Egin dezagun orain **$A \cup B \cup C$** eragiketa.
Eman ditzagun:

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$
$$B = \{ m, n, p, q, r \}$$
$$C = \{ w, x, y, z \}$$

Hasteko egin dezagun $A \cup B$

$D = A \cup B = \{ a, b, c, d, e, m, n, p, q, r \}$
eta orain $D \cup C = \{ a, b, c, d, e, m, n, p, q, r, w, x, y, z \}$

Beraz,

$$(A \cup B) \cup C = \{ a, b, c, d, e, m, n, p, q, r, w, x, y, z \}$$

Egin dezagun orain bestela. Hasteko $C \cup B = P$

$P = \{ w, x, y, z, m, n, p, q, r \}$
eta orain $P \cup A = (C \cup B) \cup A$

$P = \{ w, x, y, z, m, n, p, q, r, a, b, c, d, e \}$

Bi bideetatik elementu **berberak** lortzen ditugu. Beraz:

$$(A \cup B) \cup C = (B \cup C) \cup A$$

(elkar- legea) = bilketa anizkun bat egitekotan, **nahi bezala** ezkon daitezke bilketa-bikoteak:

$$(A \cup B) \cup D$$
$$A \cup (B \cup D)$$, eta abar.

2.8. — Multzo hutsak elementurik batere ez duenez gero:

$$A \cup \varnothing = A$$

Baita, bestalde, zerorrek froga dezakezunez:

baldin $A \cap B = \varnothing$

$$Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$$

Esate baterako bi multzo berezi hauetan:

$M = \{$ Joanes, Jakes, Mikel $\}$

$N = \{$ Maritxu, Jenifer, Klara, Osane $\}$

Hortaz:

$$M \cap N =$$

$$Z(M \cup N) =$$

$$Z(M) =$$

$$Z(N) =$$

3 — CARTESTAR ELKARKETA

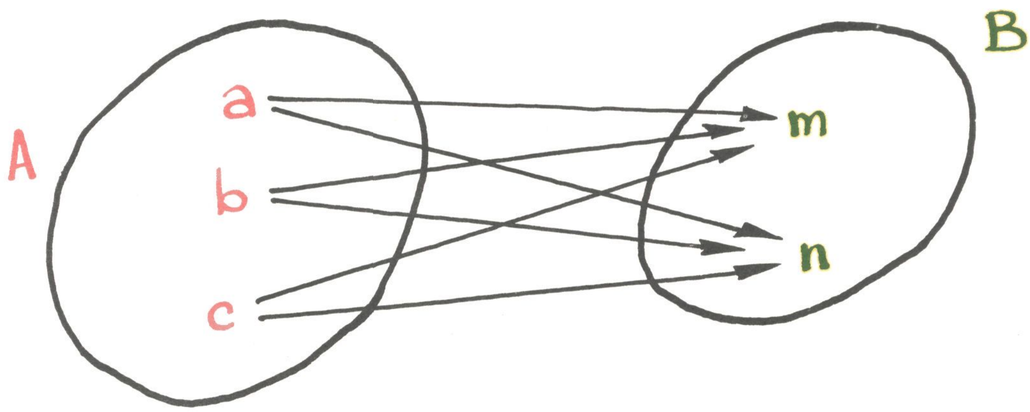
3.1. — Gogora dezagun orain Cartestar Elkarketaren ideia.

Aurreko urteetan ikasi dugunez, Cartestar Elkarketak bi multzoren elementuak binaka elkartzen ditu, bikotez osatutako multzo berri bat sortuz:

$$A = \{ a, b, c \}$$
$$B = \{ m, n \}$$
$$A \times B = \{ (a,m), (a,n), (b,m), (b,n), (c,m), (c,n) \}$$

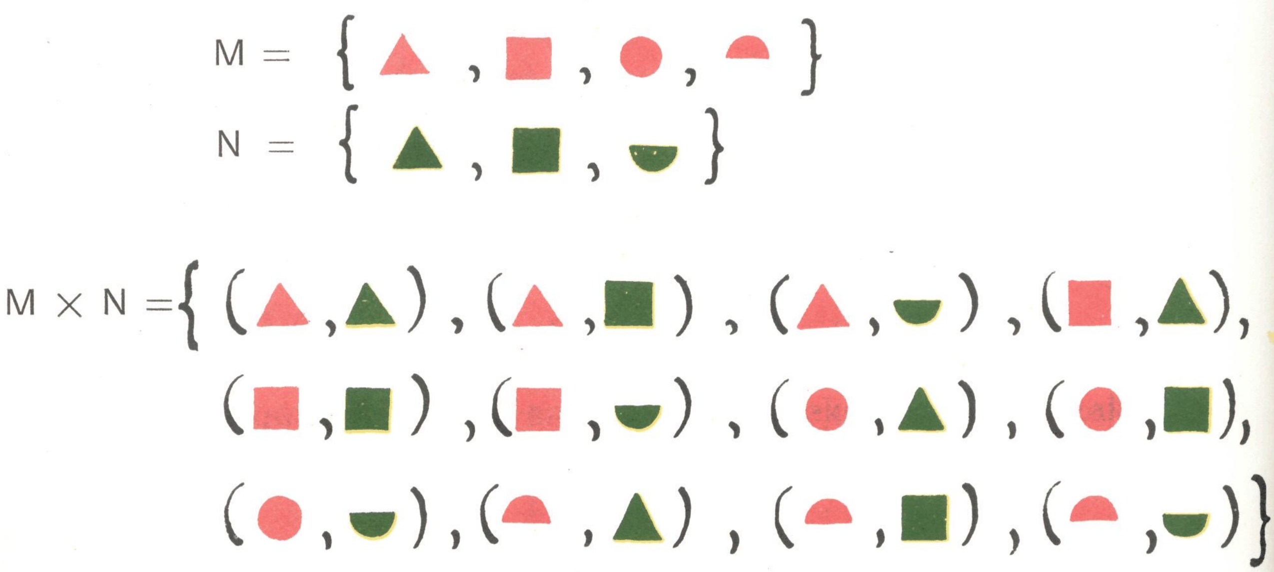
(irakur A x B = «A bider B»)

Eta Venn-en diagramak erabiliaz:



Lehenengo multzoko elementu **bakoitza** bigarren multzoko elementu **bakoitzarekin** elkartzen da segidan, bikote berriak sortuz.

— Egin dezagun beste Cartestar Elkarketa hau:



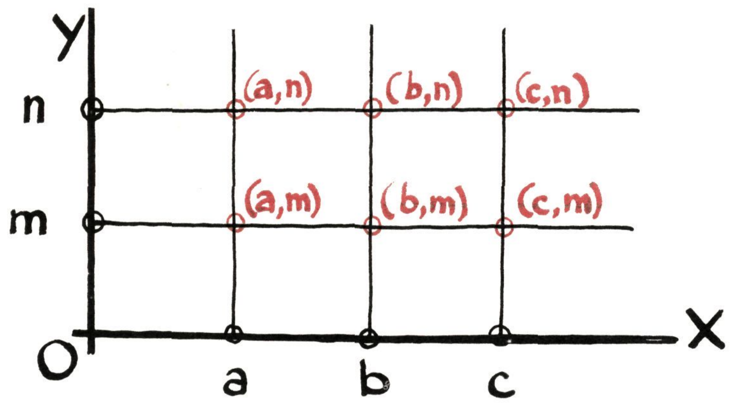
— Osa zazu zuk orain beste eragiketa hau:

$S = \{ m, n, p \}$

$T = \{ 1, 2, 3 \}$

$S \times T = \{ (m,1), (m,2), \ldots \qquad \}$

3.2. — Cartestar Elkarketa oso egokiro adieraz daiteke Des Cartes matematikalariaren ardatzak erabiliaz.

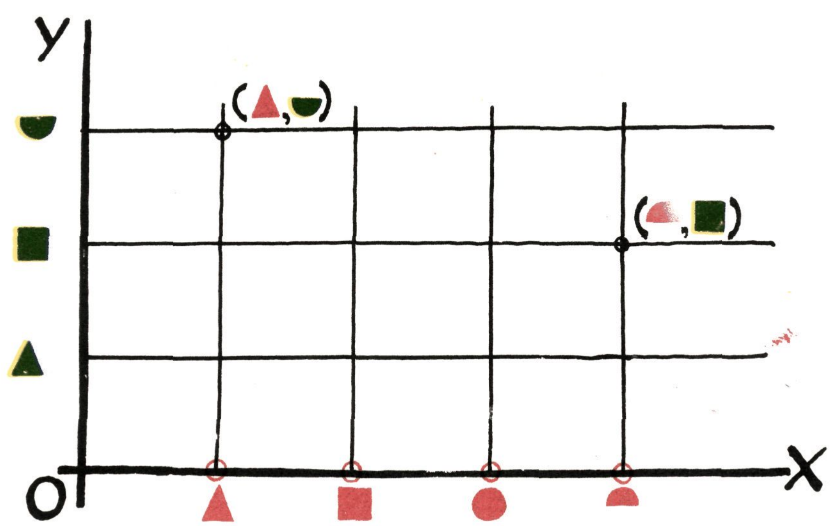


OX eta OY zuzenak, grafikoaren oinarri, cartestar ardatzak dira.

Ondoriozko multzo berriak, beraz, puntu gisa agertzen dira ardatzen **arteko** eremuan; eta oinarrizko multzoak, **ardatzetan beretan puntu** gisa.

Elkarketa-bikote bakoitzari puntu bat dagokio; eta puntu bakoitzari elkarketa-bikote bat.

Era berean



(Osa zazu zerorrek diagrama hau)

3.3.— Cartestar Elkarketa deritzan multzo honetan, berriz diogu, elementuak **bikote** dira beti: (b,m) (■ , ▲), (p,3) eta abar.

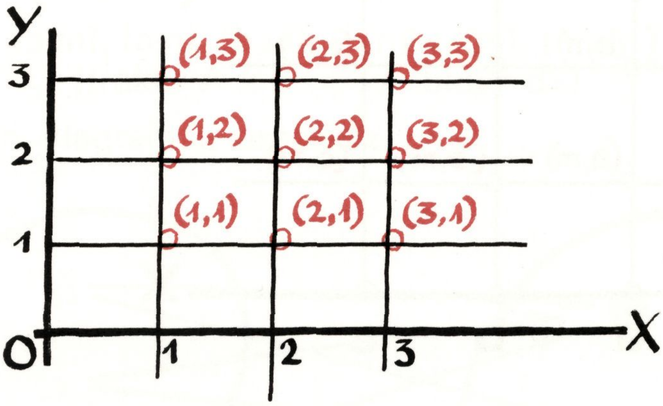
Hots, bikote hauetan kontuz ibili behar da bikote barneko elementuen ilarari dagokionez.

Eman ditzagun bi multzo hauek:

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

Egin dezagun cartestar elkarketa:



Irudia begiratu besterik ez dugu behar (2,1) eta (1,2) bikoteak **bi puntu desberdin** direla erreparatzeko:

$$(2,1) \neq (1,2)$$

Era berean:

$$(1,3) \neq (3,1)$$

$$(2,3) \neq (3,2), \text{ eta abar.}$$

Hitz batez, cartestar elkarketak ematen dituen bikoteetan, ez dago barruko bi osakinen artean truka-legerik; eta

$$(a,b) \neq (b,a)$$

3.4.— Egin ditzagun orain, Venn-en eta Descartes-en diagramarik gabe, ondoko elkarketa hauek:

$$A = \{ a, p, m, d \}$$

$$B = \{ n, a, r \}$$

$$A \times B = \{ (a,n), (a,a), (a,r) \; (p, n), \ldots \}$$

Ohar zazu:

$$Z(A) = 4$$
$$Z(B) = 3$$
$$Z(A \times B) = 4 \times 3 = 12$$

Egizu zuk beste hau:

$$M = \{ 1, 3, 5 \}$$

$$N = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$M \times N = \{ (1,2), \ldots \qquad \}$$

3.5. — Iaz ikasi genuen bezala, cartestar elkarketak **ez du truka-legea.** Biderkarien segidak antsia du. Beste modu batez esateko:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

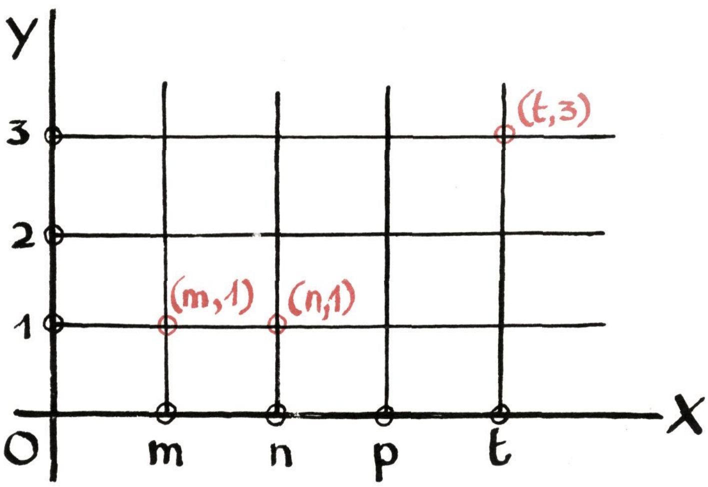
Ikus dezagun argibide batez.

Demagun multzo pare hau:

$$A = \{ m, n, p, t \}$$

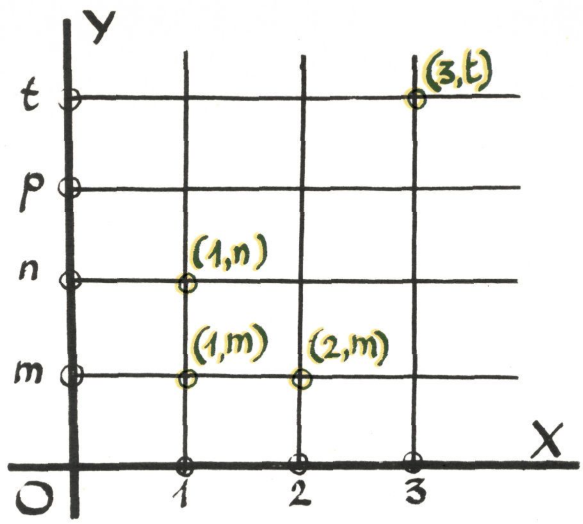
$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

eta buru dezagun **A** $\times$ **B** elkarketa. cartestar ardatzak erabiliz:



$$A \times B = \{ (m,1), (m,2), (m,3), (n,1), (n,2), (n,3), (p,1), (p,2), (p,3), (t,1), (t,2), (t,3) \}$$

Egin dezagun orain **B** $\times$ **A** elkarketa:

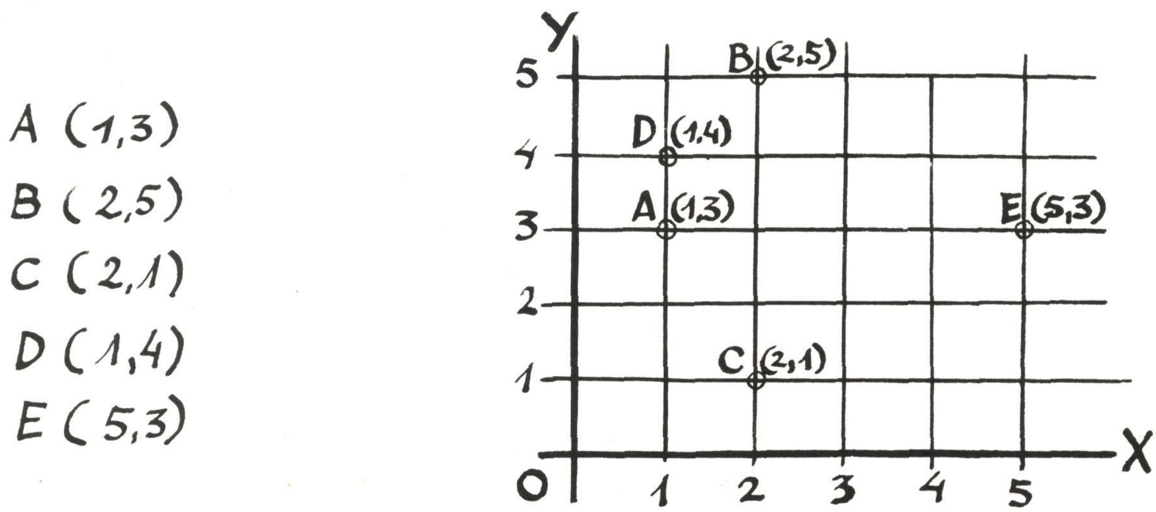


$(n,1) \neq (1,n)$

$(p,1) \neq (1,p)$, eta abar.

Beraz: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

3.6. — Bikoteen lehenengo elementua errarako ardatzaren arabera hartu behar da (X); eta bigarren elementua, berriz, goruntz, zuteko ardatzaren arabera (Y). Honetara:



3.7. — Ontzi batek mezu bat bidali du, eta (4,5) puntuan hondoratzen hasia dela esan. Inguruan dauden hiru ontzik entzun dute SOS hori. A ontzia (1,1) puntuan dago; B ontzia (7,4) puntuan, eta D ontzia (2,6) puntuan.

Bila zazu, cartestar diagrama baten bitartez, nork eman ahalko dion lehenik bere laguntza.

3.8. — Har zazu paper kadrilatua.

Lehendabizikorik bila itzazu zortzi puntu hauek:

A	(5,1)	B	(6,4)
C	(9,5)	D	(6,6)
E	(5,9)	F	(4,6)
G	(1,5)	H	(4,4)

ABCDEFGH ilara segituz, marraz ezazu irudi hori: AB lotuz, BC segidan, CD, DE, eta abar. Zer eite lortu duzu?

— Marraz itzazu era berean ondoko eite hauek:

a) (3,1), (4,4), (3,7), (4,2), eta berriz (3,1)

b) (5,1), (8,4), (5,7), (2,4), eta (5,1)

d) (9,1), (9,3), (4,3), (4,7), (7,7), (7,9), (4,9),(4,13), (9,13), (9,15), (2,15), eta (9,1)

— Bila itzazu zuk, itzuletara, zerorrek egingo duzun eite bati dagozkion bikoteak.

— Ez dakit ezagutzen duzunez «ontzi-gudua» deritzan jokoa. Paper kadrilatutan jostatzen da joko hori. Oinarritzat, jakina, ontziak ezartzeko eta hondorarazteko, cartestar ardatzak daude.

3.9. — Egin dezagun orain cartestar elkarketa berezi hau; $A \times A = A^2$ (= A bider A, berdin A bi)

$$A = \{ a, b, c \}$$

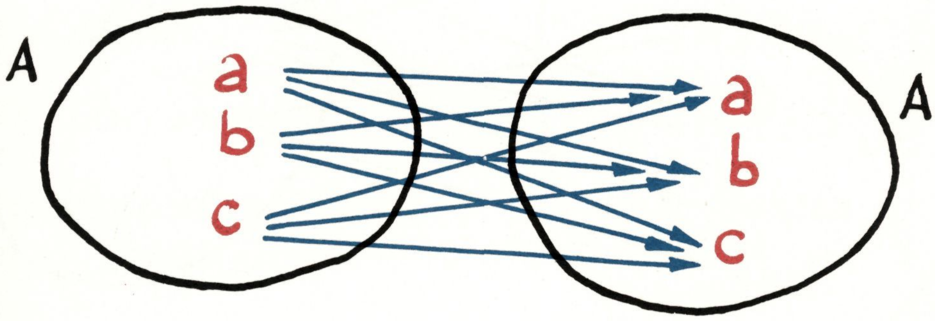
$$A = \{ a, b, c \}$$

$$A^2 = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c) \}$$

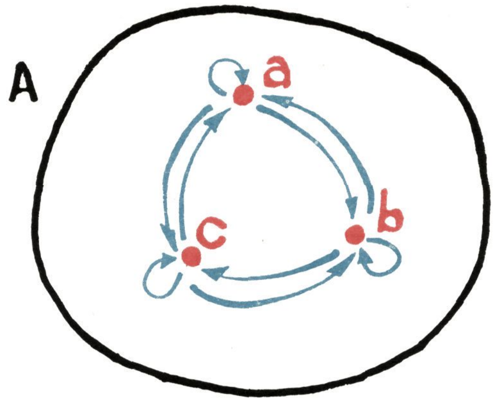
$$Z(A) = 3$$

$$Z(A^2) = 3 \times 3 = 9$$

Marraz dezagun elkarketa hau Venn-en diagramaz:



edo diagrama bakar batez baliatuz:



Gogoan har zazu diagrama hori.

3.10. — Ikus dezagun orain **A** $\times$ $\varnothing$ elkarketa.

A = { a, b, c, d }

B = $\varnothing$

A multzoko elementuak B-ko elementuekin elkartzerik ez dago.

Beraz: A $\times$ $\varnothing$ = $\varnothing$

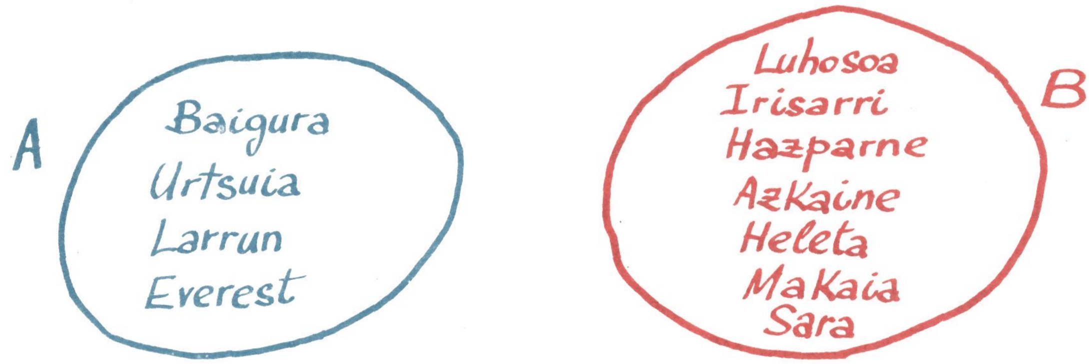
4 — BI MULTZOREN ARTEKO ELKARPIDEAK (I)

4.1. — Eman ditzagun bi multzo hauek:

A = { Baigura, Urtsuia, Larrun }

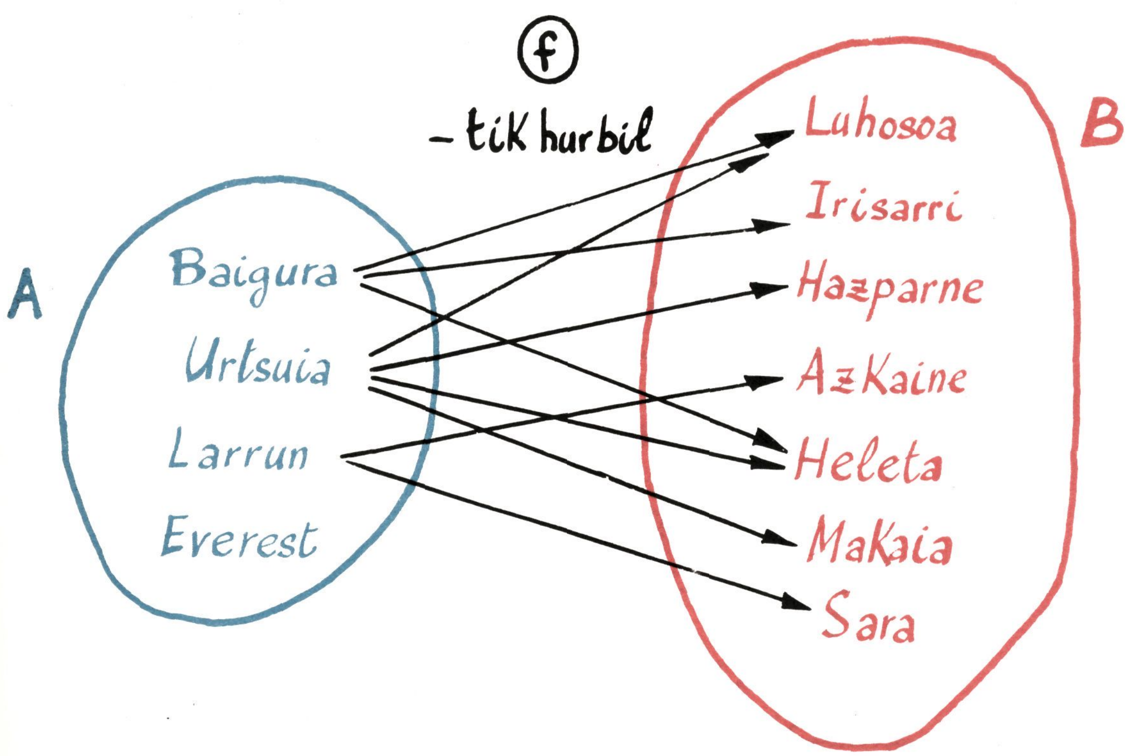
B = { Luhosoa, Irisarri, Heleta, Makaia, Hazparne, Sara, Azkaine }

eta adieraz ditzagun Venn-en marrazkiaz:



Jakina denez, Heleta Baiguraren ondoan dago, Azkaine Larrunen ondoan, eta abar.

Idatz dezagun, beraz, **-tik hurbil** ideia hori gezi baten bidez; eta hau izango dugu:



Gezi guztiak A-tik B-ra doaz. A multzoa, horrengatik, **irteerazko** multzoa da; eta B, **helburuzkoa.**

Gezi bakoitzak lotkia edo lotura bat adierazten du: gure kasu honetan 9 lotura guztira, 9 gezi.

Lotkia edo lotura bakoitzak A-ko elementu **bat** eta B-ko beste **bat** elkartzen ditu. Eman ditzagun ilaran bikote guztiok:

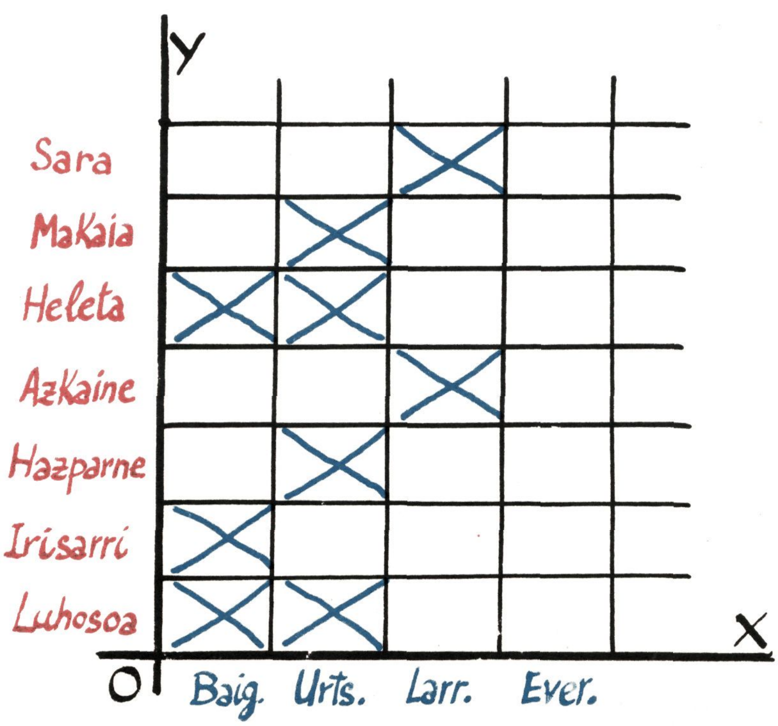
(Baigura, Luhosoa)
(Baigura, Irisarri)
(Baigura, Heleta)
(Urtsuia, Luhosoa)
(Urtsuia, Hazparne)
(Urtsuia, Heleta)
(Urtsuia, Makaia)
(Larrun, Azkaine)
(Larrun, Sara)

Everest mendia urrun dago B multzoko herrietatik; eta, hortaz, Everest hitzetik ez dago irteten den gezirik.

BEDERATZI bikote horiek A eta B multzoen arteko ELKARPIDEA mamitzen dute, E multzoa osatuz:

E = { (Baigura, Luhosoa), (Baigura, Irisarri), (Baigura, Heleta), (Urtsuia, Luhosoa), (Urtsuia, Hazparne), (Urtsuia, Heleta), (Urtsuia, Makaia), (Larrun, Azkaine), (Larrun, Sara) }

— Idatz ditzagun orain E multzoko bikoteak Cartestar ardatzak baliatuz. OX ardatzean mendiak jarriko ditugu, eta OY ardatzean euskal herriak, lotura-bikote bat dagoen laukunetan gurutze bat markatuz; eta diagrama hau izango dugu:



A eta B multzoon **cartestar elkarketa** eginez gero, berriz, laukune guztiok (28 gure kasoan) beteko lirake:

$$Z(A) = 4$$
$$Z(B) = 7$$
$$Z\ (A \times B) = 4 \times 7 = 28 \text{ bikote}$$

(= gure kasoko 9-ak; eta gainerako 19-ak ere bai)

A eta B multzoen artean dagoen **edozein elkarpide, A $\times$ B** cartestar elkarketaren azpi-multzoa da:

$$\underline{\mathbf{E \subset A \times B}}$$

4.2. — Ikus dezagun beste adibide batez. Eman ditzagun bi multzo hauek:

M = { Arga, Aturri, Urumea, Errobi }

N = { Akize, Baiona, Ahurtiri, Iruñea, Kanbo }

Hiru ibai horietako batzuek N multzoko hiri edo herri batzuk gurutzatzen dituzte: Baiona, esate baterako, bai Aturrik bai Errobik igarotzen dute; Argak Iruñea igarotzen du; eta abar. Geografia apur bat jakinez gero, hauek ditugu lotura-bikoteak:

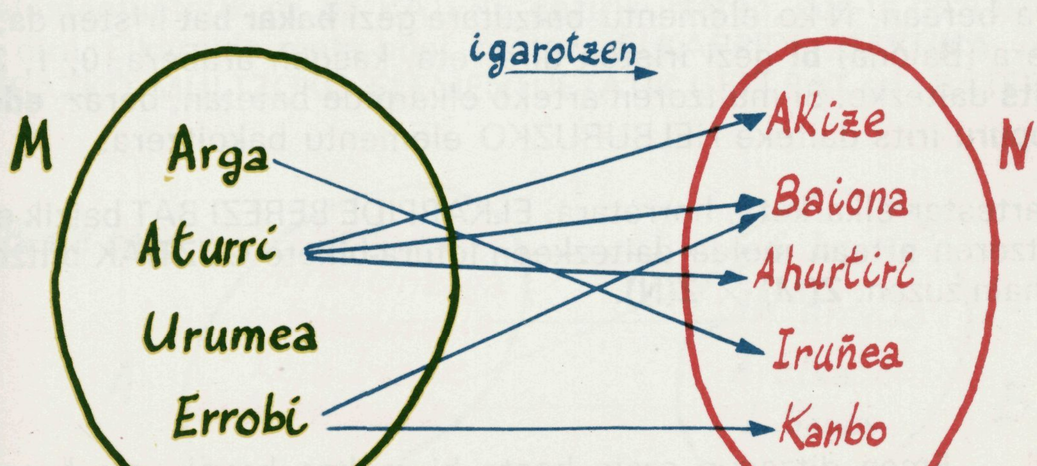
(Arga, Iruñea)
(Aturri, Akize)
(Aturri, Baiona)
(Aturri, Ahurtiri)
(Errobi, Baiona)
(Errobi, Kanbo)

Kaso honetako elkarpideak, beraz, 6 bikote ditu:

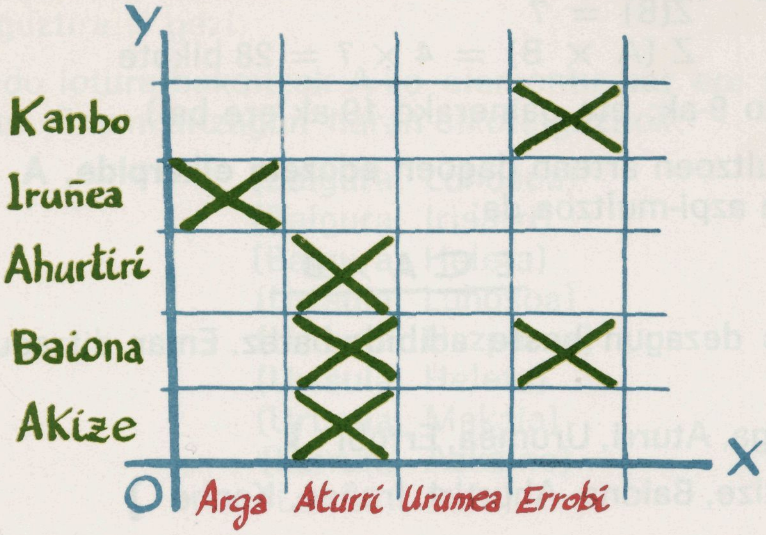
E = { }
(idatz itzazu zerorrek)

Elkarpide hori bi mudutara adieraz dezakegu:

a — Venn-en marrazkiaz, eta gezi bidez:



b — Cartestar ardatzak baliatuz:



M eta N cartestar elkarketak, berriz, dakizunez, M-ko elementu **bakoitza N-ko** elementu **bakoitzarekin** lotuz, taula **betea** emango luke:

$4 \times 5 = 20$ bikote emanez.

E elkarpideaz, beraz, hau idatz dezakegu:

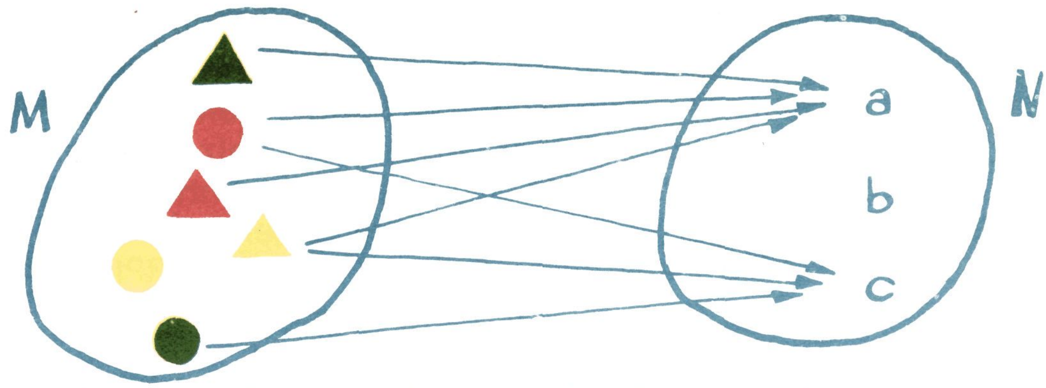
$$\mathbf{E \subset M \times N}$$

4.3. — Kontura zaitez M-ko elementu batetik (Urumea, kaso horretan) ez dela gezirik **batere** irteten; beste batetik, berriz, gezi **bakar bat** irteten dela; beste batetik (Errobi) **bi** gezi; eta Aturri elementutik, azkenik, **hiru** gezi. Bi multzoren arteko elkarpide batetan, beraz, edozein gezi-kopuru irten daiteke IRTEERAZKO elementu bakoitzetik (0, 1, 2, 3...)

Era berean, N-ko elementu batzutara gezi **bakar bat** iristen da; beste batera (Baiona) **bi** gezi iristen dira; eta, kasoen arabera, 0, 1, 2, 3... gezi irits daitezke. Bi multzoren arteko elkarpide batetan, beraz, **edozein** gezi-kopuru irits daiteke HELBURUZKO elementu bakoitzera.

Cartestar elkarketa, horretara, ELKARPIDE BEREZI BAT baizik ez da: **bi** multzoren artean molda daitezkeen lotura-bikote GUZTIAK biltzen dituena hain zuzen: **Z(M) × Z(N).**

4.4. — Eman ditzagun orain beste bi multzo hauek, eta beron artean dauden harremanak eta loturak:

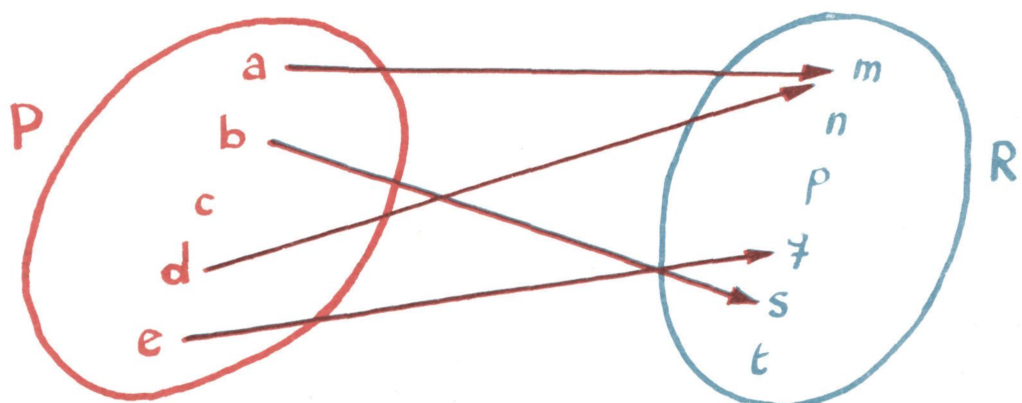


M multzoak 6 elementu ditu, eta N-ak berriz 3 elementu.

Irteerazko multzotik (M-tik, alegia) gezi batzuk irteten dira (1, 2, 1, 2, 0, 1). Helburuzko multzora (N-ra, alegia) gezi batzuk iristen dira (4, 0, 3, gure kasoan).

Beriz ere, ELKARPIDE soilen kaso honetan, ez dago legerik ez mugarik: ez irteerazko geziei buruz, ez helburuzkoei buruz ere.

4.5. — Eman ditzagun orain, ordea, P eta R multzoak eta lotzen dituzten lotkiak (E):

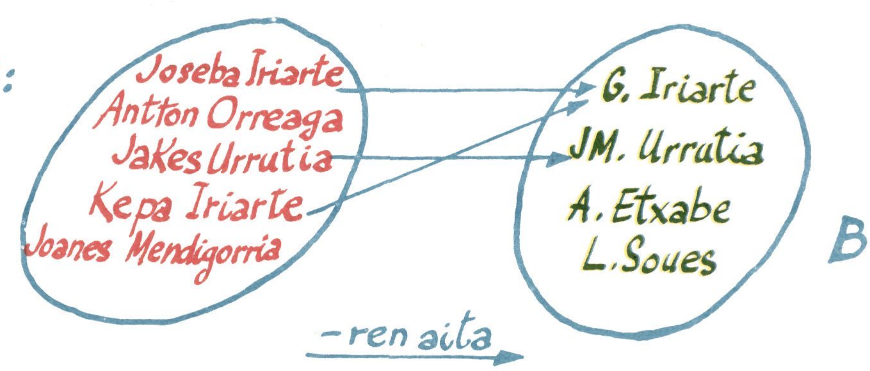


$$E \subset P \times R$$

Irteerazko bost elementuetan, lautatik irteten da gezi BANA, eta batetatik ezer ez; eta helburuzko elementuetan, hiruk ez dute ezer jasotzen, bik gezi bana, eta beste batek (m) bi gezi.

Helburuzko multzoan legerik ez badago ere, irteerazkoan badago: edo elementuetatik ez da BATERE gezirik irteten, edo-ta gezi BANA irteten dira. Elkarpide mota honi, hortaz, ELKARPIDE **BAKUNA** deritza: IRTEERAZKO MULTZOKO ELEMENTUETATIK GEZI BAT edo BATEREZ.

Beste bat:



Joseba eta Kepa (Iriarte) anaia izanik, gezi bana irten daiteke honengandik eta hargandik; baina bi horiek, hain zuzen, aita berbera dute. B **helburuzko** elementu batzutan, hortaz, eta nahiz A **irteerazko** elementuetatik gezi **bana irten** (edo-ta batere ez: ikus Antton Orreaga) **helburuzkoan** bat baino gehiago elkartzea gerta daiteke. Eta halaz ere, IRTEERAZKO MULTZOAN gezi-pilorik ez dagoelako, ELKARPIDE BAKUNA deritza horri.

$$f\,(A) \rightarrow B$$

elkarpidea, horretara, A-tik B-ra doana, BAKUNA da. Bakuntasuna, beraz, IRTEERAZKO elementuetatik **irteten** diren gezien **kopuruan datza** (1 edo O).

Oraingoz, hitz batez, IRTEERAZKO MULTZOARI BURUZ hasi gara baldintzak jartzen. Elkarpidea BAKUNA izan dadin, aski da **irteerazko** elementuetatik **irteten** diren geziek baldintza hori betetzea.

a — Hona hemen, beraz, beste elkarpide BAKUN batzuk:

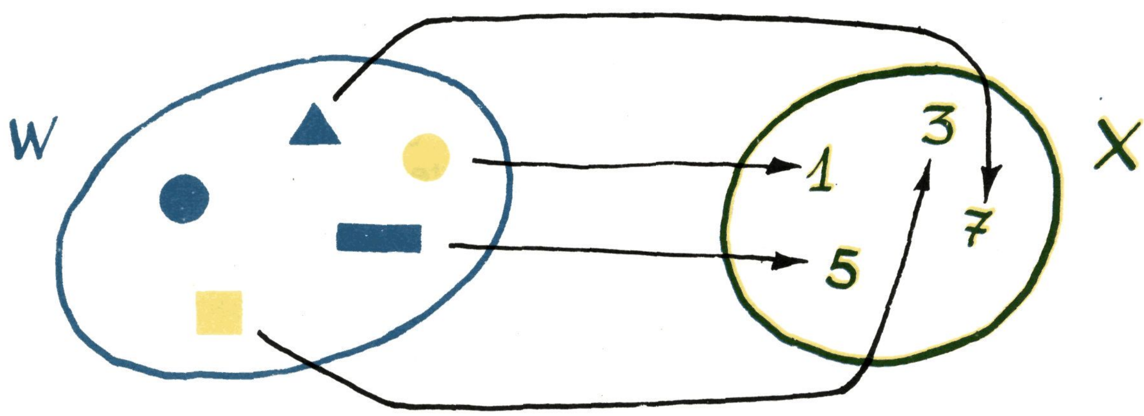
M = { a, b, c, d }

N = { m, n, p }

E = { (a,m), (b,p), (c,m) }

Egizu Venn-en marrazkia. Zer dakusazu? ZENBAT GEZI IRTETEN DA M multzotik? Nolatan irteten?

Hortaz, elkarpidea BAKUNA da.



Elkarpide hau BAKUNA da. Zergatik?

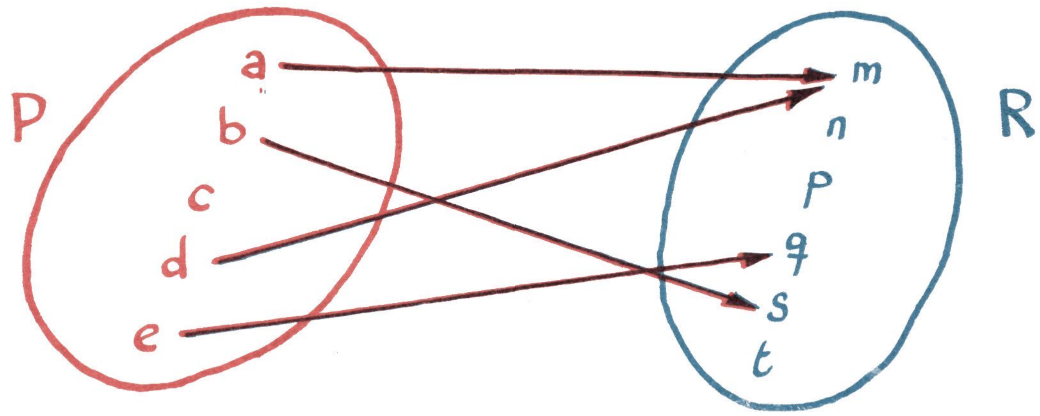
d — Esan zazu ia S eta T lotzen dituen elkarpidea bakuna ote denetz:

$$S = \{ a, b, c, d \}$$
$$T = \{ m, n, p, r \}$$

$$E = \{ (a,m), (a,r), (b,m), (b,p) \} \; ?$$
$$E = \{ (a,m), (b,m), (a,m), (b,r) \} \; ?$$
$$E = \{ (a,m), (b,n), (c,r) \} \; ??$$

Zergatik?

4.6. — Ikus dezagun orain ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA zer den. Eta, horretarako, gogoan har ditzagun berriro P eta R multzoak (4.5), baita lotzen dituzten lotura-bikoteak ere:



Elkarpideak **a** elementutik **m** elementura daraman bezala, **m** elementutik ere **a** elementura joan gaitezke, atzeruntz; eta hau genuke:

$$f(P) \longrightarrow R$$
$$\text{eta } f(a) = m$$
$$f(b) = s$$
$$f(d) = m$$
$$f(e) = q$$

Alegia: P multzoari **f** elkarpidea erasten baldin bazaio, R multzoa sortzen da; alegia, **a** elementuari **f** elkarpidea erasten baldin ba zaio, **m** elementua lortzen da; **b** ri erantsiz gero, **s**; eta abar.

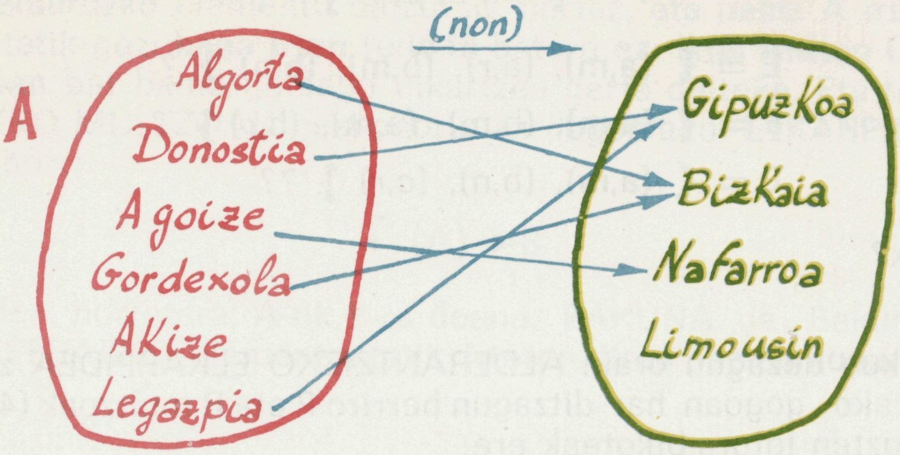
$$E = \{ (a,m), (b,s), (d,m), (e,q) \}$$

Alderantzizkoan, aldiz, bikote **bakoitzean** loturako elementuak ALDERANTZIZ hartuko ditugu:

$$E^{-1} = \{ (m,a), (s,b), (m,d), (q,e) \}$$

(**E** elkarpidearen alderantzizkoa **E**$^{-1}$ idazten da)

Esate baterako:



Beraz:

E = { (Algorta, Bizkaia), (Donostia, Gipuzkoa), (Agoize, Nafarroa), (Gordexola, Bizkaia), (Legazpia, Gipuzkoa) }
Kaso horretan **f (A) = B** f = zein probintziatan da.
f (Algorta) = Bizkaia (= zein probintziatan da Algorta = Bizkaian). Eta abar.

Alderantziz ere molda daitezke loturak:

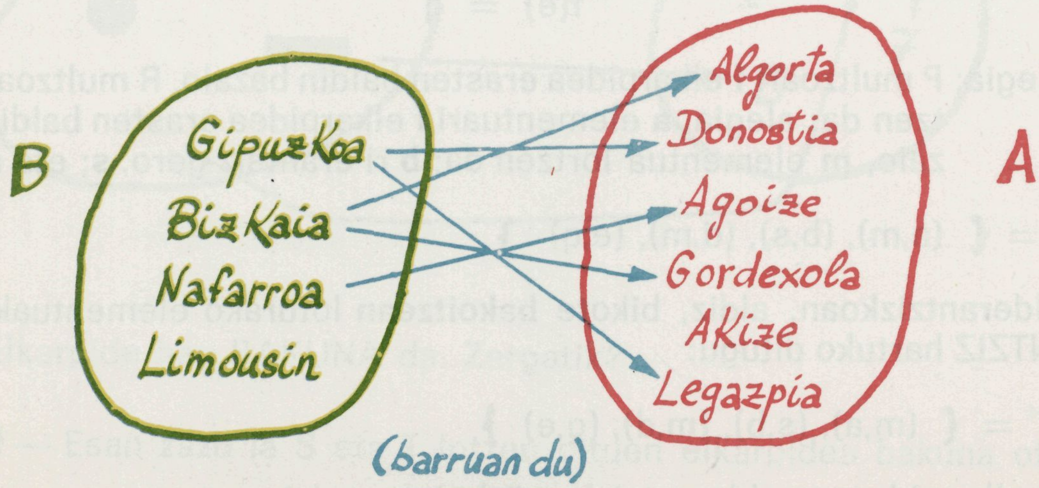
E^{-1} = { (Bizkaia, Algorta), (Gipuzkoa, Donostia), (Nafarroa, Agoize), (Bizkaia, Gordexola), (Gipuzkoa, Legazpia) }

Eta kaso horretan honela idazten da ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA:

$A = f^{-1}$ (B)
(f^{-1} = barruan du probintziak)

f^{-1} (Bizkaia) = Algorta (= Bizkaiak barruan du Algorta)

Eta Venn-en marrazkiaz:



Beraz, sinbolozko idazkeran (lehenagoko adibedean)

$$P = f^{-1}(R), \text{ eta}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(m) &= a \\ f^{-1}(s) &= b \\ f^{-1}(m) &= d \\ f^{-1}(q) &= e \end{aligned}$$

m elementuaren alderantzizkoa EZ DA BAKARRA: izan baitaiteke bai **a** bai **d.** Alderantzizko elkarpide hau, beraz, EZ DA BAKUNA, nahiz E elkarpidea bakuna izan.

Nahiz **B** $=$ **f(A)** elkarpidea **bakuna** izan, **A** $=$ **f^{-1}(B) alderantzizkoa ez da bakuna.**

Ez dago honetan zer harriturik. Askotan gertatzen da hori Matematiketan; eta zerorrek ikus dezakezu aisa:

Eman ditzagun hiru anaia:

$$A = \{ \text{Piarres, Nemexio, Elias} \}$$

Eta esan dezagun Altuna jauna dela hiruon aita.

$B = \{ \text{Altuna jauna} \}$ (elementu bakarreko multzoa, $Z(B) = 1$)

Idatz dezagun «semea da» elkarpidea:

$$\begin{aligned} \text{Piarres} &= f(\text{Altuna}) \\ \text{Nemexio} &= f(\text{Altuna}) \\ \text{Elias} &= f(\text{Altuna}) \end{aligned}$$

Elkarpide hau BAKUNA da: A multzoko elementuetatik gezi BAKAR BAT irteten da B aldera; sekulan ez 2, 3, 4...

Alderantzizko elkarpideak, berriz («aita da») hau emango luke:

$$\begin{aligned} \text{Altuna} &= f^{-1}(\text{Piarres}) \\ \text{Altuna} &= f^{-1}(\text{Nemexio}) \\ \text{Altuna} &= f^{-1}(\text{Elias}) \end{aligned}$$

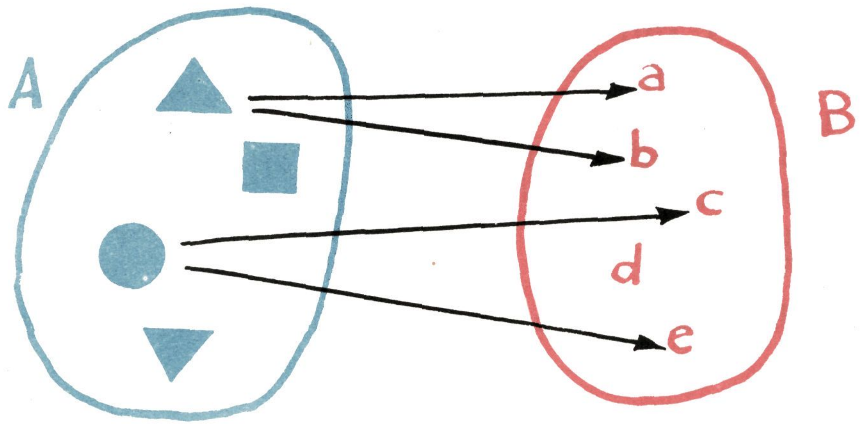
Alderantzizko elkarpide hau, beraz, EZ DA BAKUNA. «Altuna» elementutik HIRU gezi irteten dira.

Ikus ezazu hau garbikiago Venn-en marrazkiak eginez bi kasootan.

Alderantzizko elkarpidea eta jatorrizkoa, beraz, **ez dira beti mota berberekoak.** Irteerazko multzoaren araberako elkarpidea BAKUNA izanagatik ere, helburuzkoaren araberako elkarpidea **anizkun** gerta daiteke.

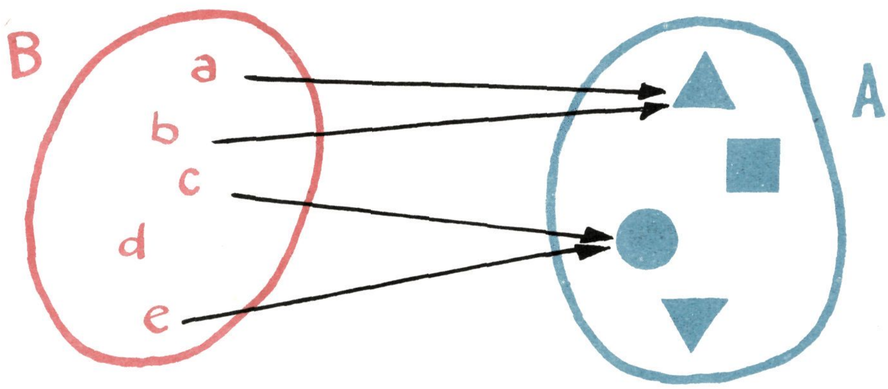
4.7. — Argi dezagun puntu hau beste alderantziketa batez.

Esate baterako:



Elkarpide hau B = f(A) horrela emanda EZ DA BAKUNA.

Alderantziz, berriz, BAKUNA DA:



Hemen A = f^{-1}(B) BAKUNA DA: B-ko elementuetatik, gezirik irteten denean, **bakar bat** irteten da.

4.8. — Bila itzazu E eta F delakoen alderantzizko elkarpideak; eta Venn-en marrazkiak eginez, ikus ezazu bakunak direnez. Zergatik?

E = { (a,m), (b,n), (a,p), (d,q) }

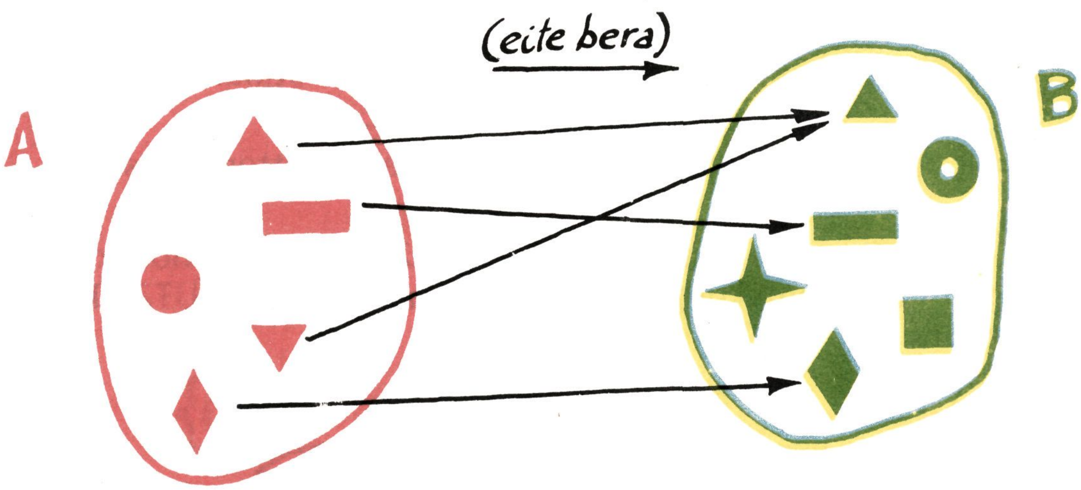
F = { (a,p), (b,p), (c,q), (d,q) }

5 — E L K A R P I D E A K (II)

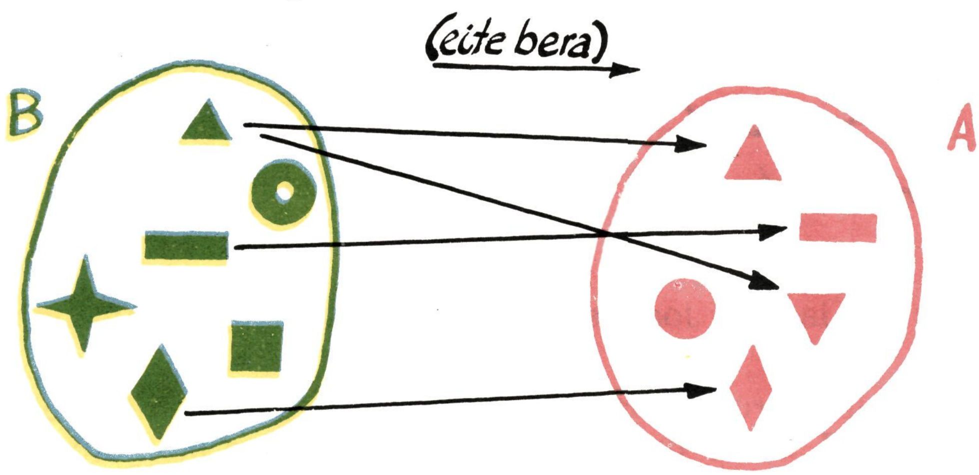
APLIKAZIOAK ETA ELKAR-APLIKAZIOAK

5.1. — Azkeneko ikaskaian ELKARPIDE BAKUNA zer den aztertu dugu, baita ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA zer den ere; eta, eskuarki bederen, nahiz jatorrizko elkarpide bat BAKUNA izan (alegia, nahiz irteerazko elementuetatik gezi BAKAR bat irten, edo batere ez) elkarpide horren ALDERANTZIZKOA ez da beti bakuna izaten.

Eman dezagun, esate baterako, E elkarketa bakun hau:

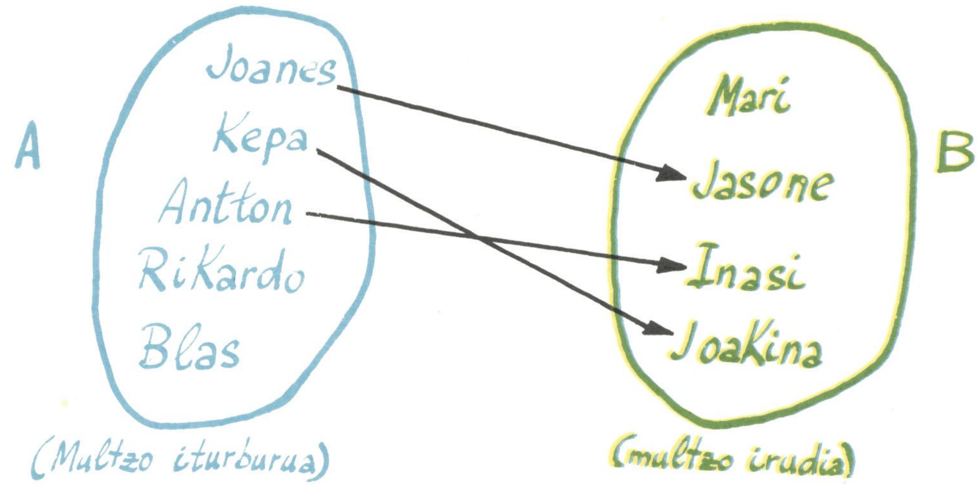


Egin dezagun orain multzo ITURBURU zena (irteerazkoa) ondokoaren multzo IRUDI (helburuzkoa); eta multzo irudia zena, egin dezagun iturburu. Beraz, bila dezagun $\mathbf{E}^{-1}$ ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA:



Triangulu berdetik BI gezi irteten dira; eta hortaz, -ren irudia EZ DA BAKUNA; eta ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA ere ez.

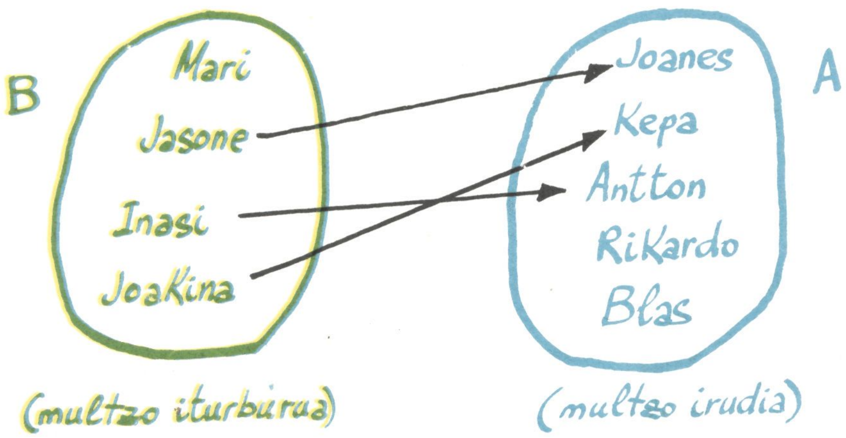
5.2 — Zenbait kasotan, berriz, jatorrizko elkarpidea BAKUNA da; eta alderantzizkoa ere bai:



Hona hemen elkarpide horrek dituen hiru lotkiak:

E = { (Joanes, Jasone), (Kepa, Joakina), (Antton, Inasi) }

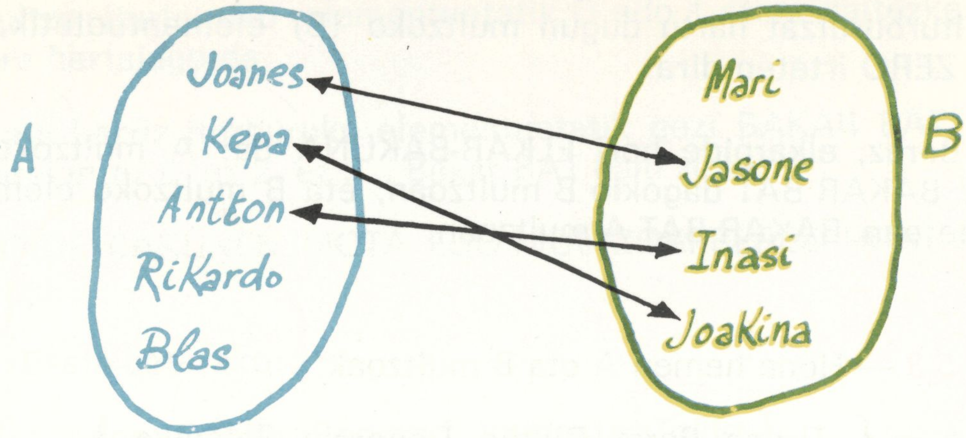
Eta idatz dezagun orain ALDERANTZIZKOA, nor norekin ezkondu den alegia, baina emakumeen multzoa orain ITURBURUTZAT hartuz, eta senarrena multzo IRUDI gisa utziaz:



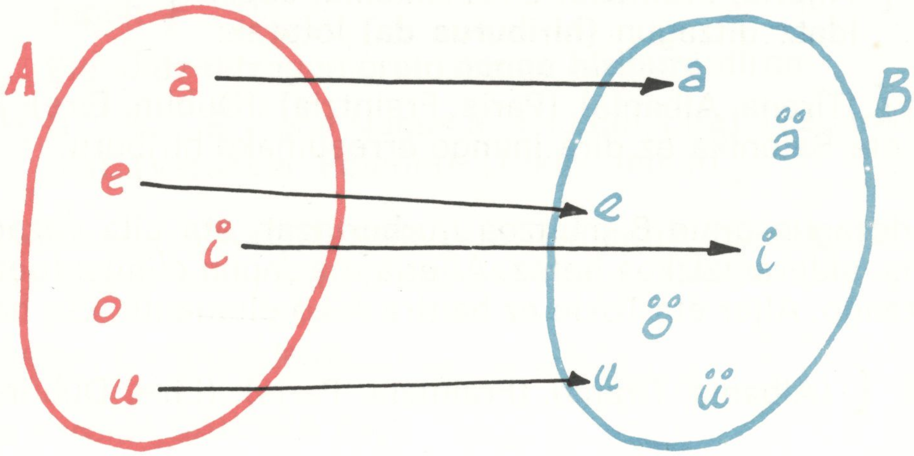
E^{-1} = { (Jasone, Joanes), (Joakina, Kepa), (Inasi, Antton) }

Multzo iturburutzat hartu dugun B-multzoko elementuetatik, ez da inoiz GEZI BAT baino gehiago irteten; eta hortaz alderantzizko elkarpidea ere BAKUNA da.

Kaso honetan elkarpidea ELKAR-BAKUNA dela esan ohi da; eta elkarpideak honela adieraz daitezke Venn-en marrazki BAKAR batez:

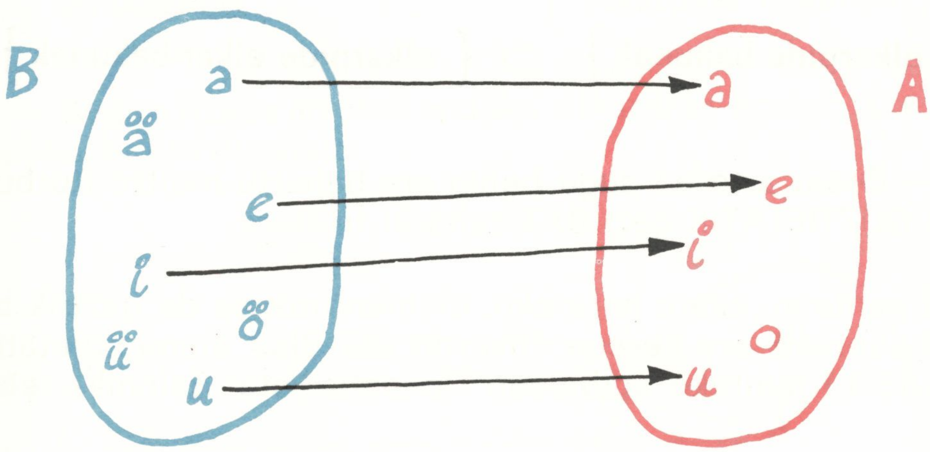


Ikus dezagun beste adibide batez:



$$E = \{(a, a), (e, e), (i, i), (u, u)\}$$

Alderantzizko elkarpidea, beraz:



eta:

$$E^{-1} = \{(a, a), (e, e), (i, i), (u, u)\}$$

Iturburutzat hartu dugun multzoko (B) elementuetatik, gezi BAT EDO ZERO irteten dira.

Beraz, elkarpide hori ELKAR-BAKUNA da: A multzoko elementu BATI, BAKAR BAT dagokio B multzoan; eta B multzoko elementu BATI, era berean, BAKAR BAT A multzoan.

5.3.— Hona hemen A eta B multzoak:

A = { Tirana, Paris, Dublin, Donostia, Salonika }

B = { Aljeria, Fraintzia, Eire, Albania, Japon }
Idatz ditzagun **(hiriburua da)** loturak:

E = { (Tirana, Albania), (Paris, Fraintzia) ,(Dublin, Eire) }
Donostia eta Salonika ez dira inongo erresumako hiriburu.

Har dezagun orain B multzoa iturburutzat, eta bila dezagun elkarpide berria, alderantzizkoa beraz. Aljeria eta Japon elementuetatik ez da gezirik irtengo, Aljer eta Tokio ez baitira A-ko elementu. Eta hau dugu:

E^{-1} = { (Albania, Tirana), (Fraintzia, Paris), (Eire, Dublin) }

Bai $\mathbf{B = f(A)}$ bai $\mathbf{A = f^{-1}(B)}$ elkarpideak, beraz, BAKUNAK dira; eta beraz elkarpide hori ELKAR-BAKUNA da.

Beste modu batera esateko: elkarpide BAKUN guztiak ez dira elkarbakun; baina elkarpide ELKAR-BAKUN guztiak, elkarpide bakun dira. Matematikazko idazkeraz:

$$\{ \textbf{elkarpide bakunak} \} \supset \{ \textbf{elkarpide elkar-bakunak} \}$$

5.4.— Orain arte ez dugu behin ere behartu multzo iturburua bere elementu GUZTIETATIK gezi BAT zehazki irtetera.

(5.1.) puntuan, esate baterako, elementutik ez da gezirik batere irten; (5.2.) puntuan, era berean, Rikardo eta Blas elementuetatik, gauza bera; eta (5.3.) puntuko adibidean Donostia eta Salonika elementuetatik.

Ongi ohartua baldin bazara, gero eta baldintza HESTUAGOAK ari gatzazkie jartzen elkarpideei. Emaiozu kasu ilara honi:

a) Multzo iturburuko elementuetatik EDOZEIN gezi-kopuru irten daiteke: 0, 1, 2, 3...

b) Multzo iturburuko elementuetatik O edo 1 atera daitezke. Aukera hertsiago da.

d) Orain berriz iturburuko elementuetatik gezi BAKAR BAT irten daiteke: ez 0, ez 2, ez 3... Bakar BAT hain zuzen.

ELKARPIDE BAKUNEN MOTA EDO MULTZOKI BEREZI HONI, **APLIKAZIO** deritza.

Esate baterako:

A = { London, Dublin, Beograd, Varsovia, Tokio }

B = { Bretaña Nagusia, Eire, Kanada, Jugoslabia, Polonia, Txina, Japon }

Eta idatz ditzagun orain **nongo hiriburu** diren:

E = { (London, Bretaña Nagusia), (Dublin, Eire), (Beograd, Jugoslabia), (Varsovia, Polonia), (Tokio, Japon) }

A-ko elementu BAKOITZETIK (eta denetatik, beraz) gezi BAT irteten da; edo, beste modu batera esateko, lotura BAKAR BAT.

Hitz batez, E elkarpideaz:

1/ elkarpide BAKUNA da;

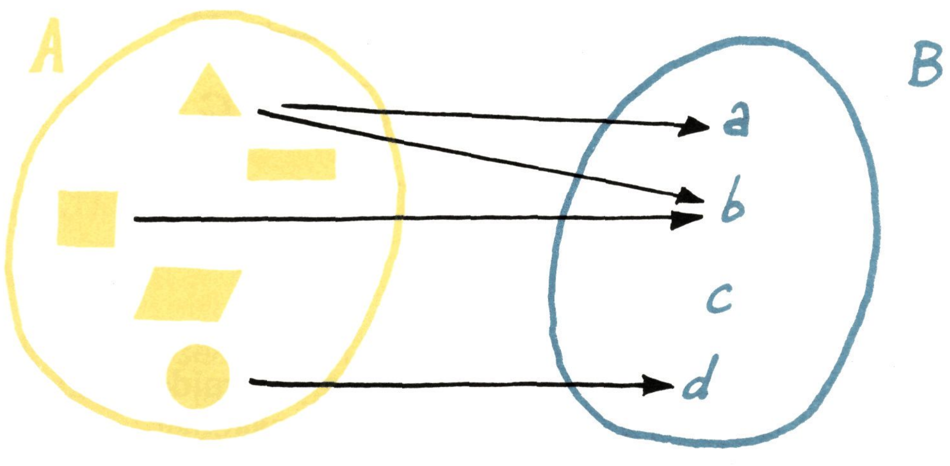
2/ horrez gainera, iturburu den multzoko elementu GUZTIETATIK gezi edo lotura BANA irteten da multzo irudiaren aldera.

Bi baldintza horiek **batera** betetzen dituelako, elkarpide horri APLIKAZIO deritza:

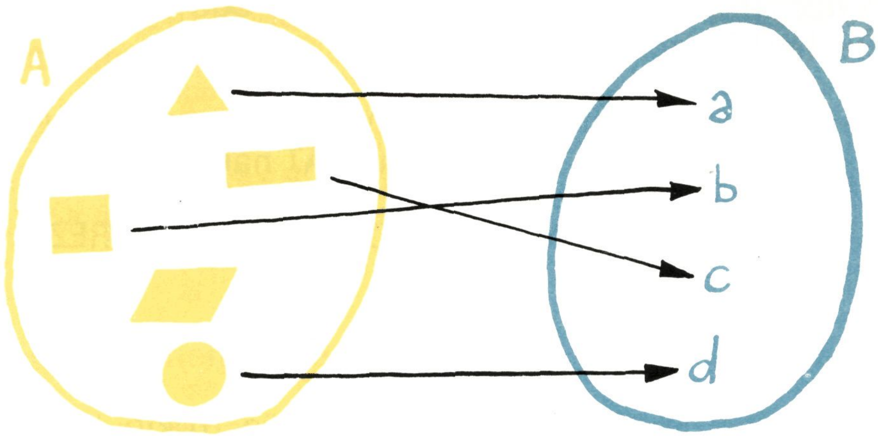
$$\{\textbf{aplikazioak}\} \subset \{\textbf{elkarpide bakunak}\}$$

5.5.— Begira itzazu arretaz ondoko elkarpide horiek, eta azal zazu xeheki aplikazio ote direnetz:

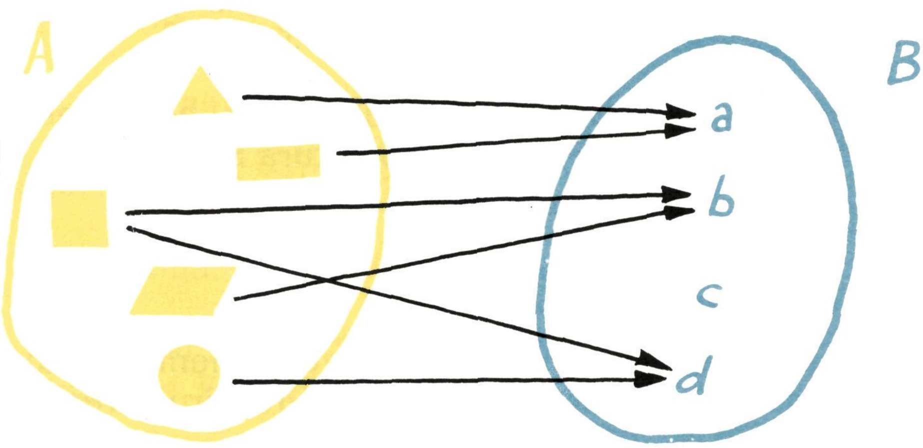
(1)



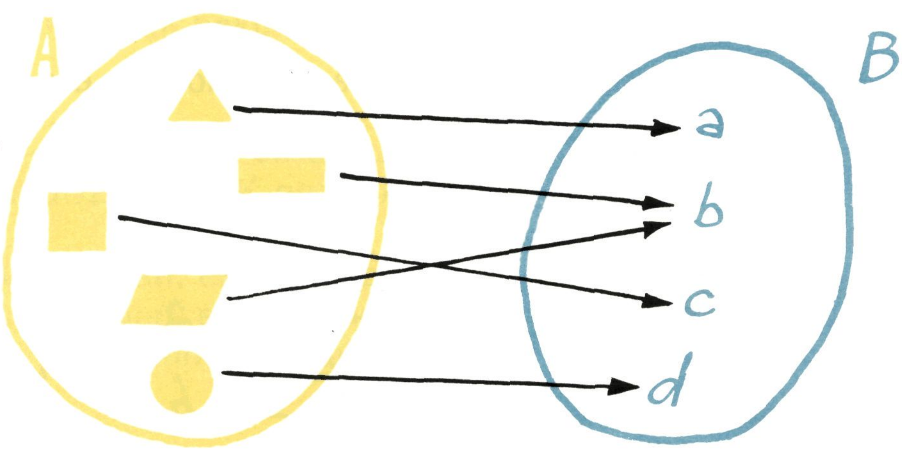
(2)



(3)



(4)



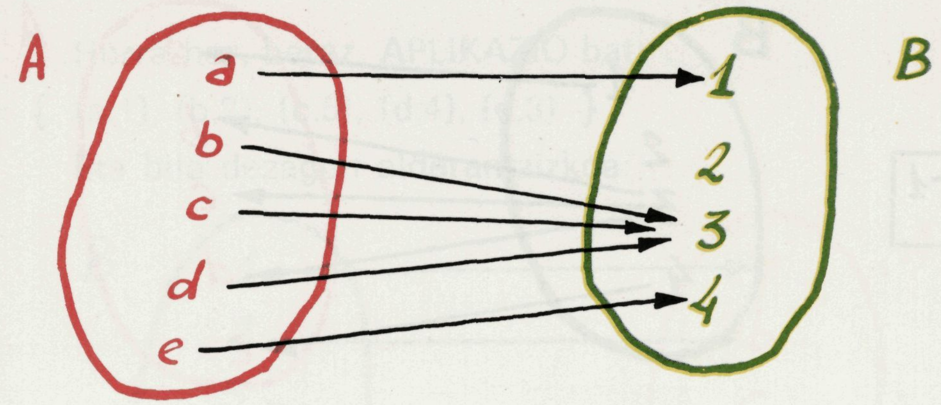
5.6. — Bila itzazu hauen alderantzizko elkarpideak, eta azter itzazu xeheki. Zein da aplikazio? Zergatik ez gainerakoak?

5.7. — Aplikazio bat zer den finkatzeko, irteerazko MULTZO ITURBURUA izan dugu gogoan; eta honetako elementuei buruz eskatu dugu:

1 — elementuetatik gezi BAKAR BAT irtetea;

2 — elementu BAKOITZETIK irtetea gezi bat.

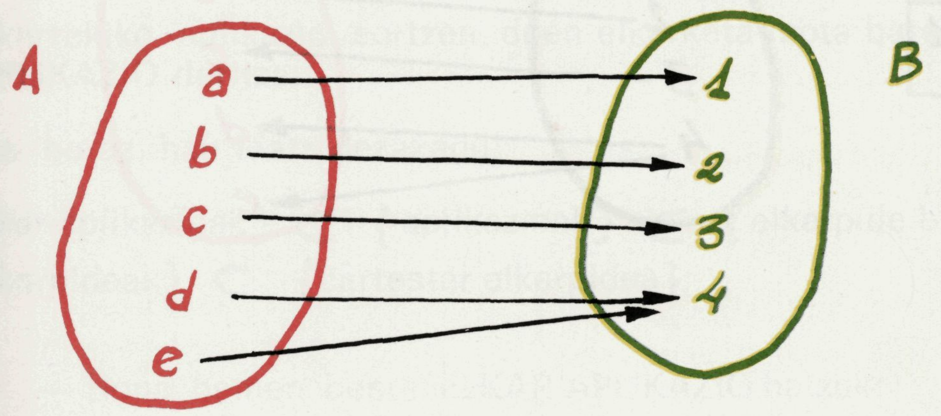
Multzo irudia, hortaz, ez dugu oraingoz ezertara behartu. Esate baterako:



E = { (a,1), (b,3), (c,3), (d,3), (e,4) }

Elkarketa hau aplikazio bat da.

Eta beste hau:



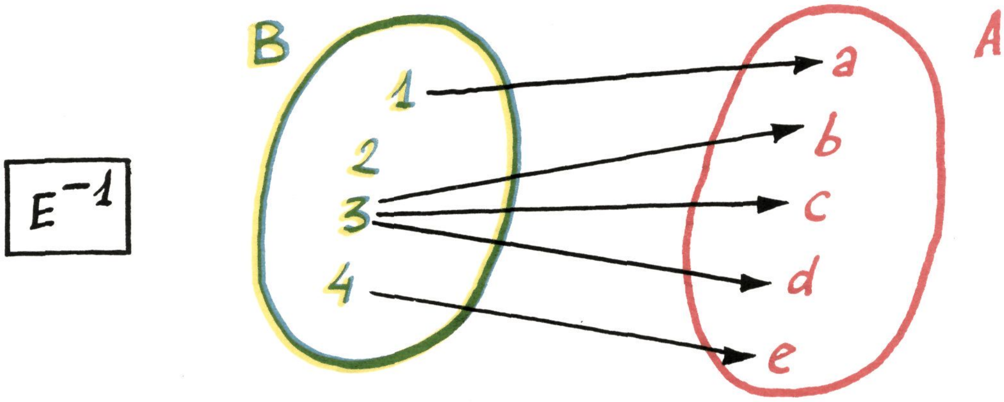
F = { (a,1), (b,2), (c,3), (d,4), (e,4) }
ere aplikazio bat da.

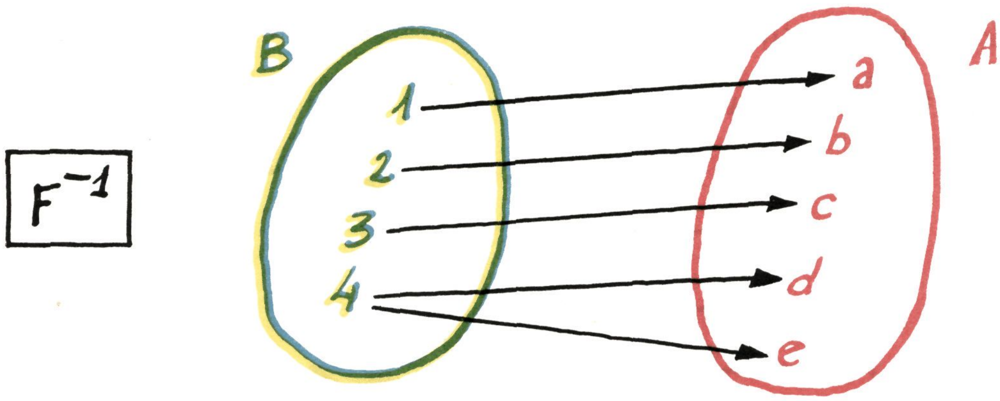
Oraindik ere, ordea, MULTZO IRUDIARI BURUZ mugak jarriz gero, baldintza hertsiagoak jar ditzakegu. Beste hitz batez, ALDERANTZIZKO multzoari buruz mintza gaitezke, multzo irudia multzo iturburu eginez.

5.8.— Har ditzagun E eta F elkarketak (5.7. puntukoak); eta idatz ditzagun alderantziz:

$E^{-1} = \{ (1,a), (3,b), (3,c), (3,d), (4,e) \}$
$F^{-1} = \{ (1,a), (2,b), (3,c), (4,d), (4,e) \}$

Edo, Venn-en marrazkiaren arabera:



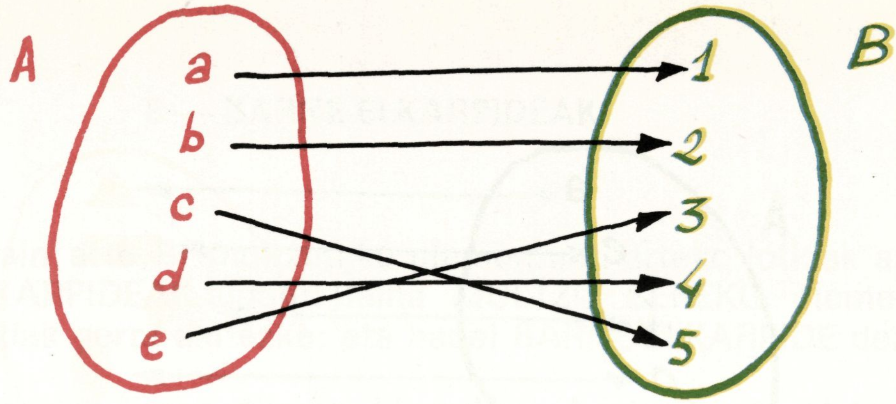


E^{-1} elkarketa EZ DA BAKUNA: «3» elementutik hiru gezi irteten baitira.

F^{-1} elkarketa EZ DA BAKUNA: «4» elementutik bi gezi irteten baitira.

Beraz, E^{-1} eta F^{-1} alderantzizko elkarketak EZ DIRA APLIKAZIO.

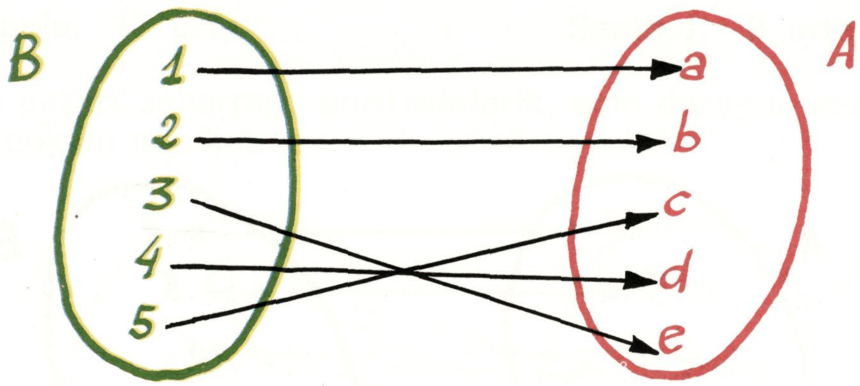
Eman dezagun, ordea, elkarpide hau:



Horra hor, beraz, APLIKAZIO bat:

$E = \{ (a,1), (b,2), (c,5), (d,4), (e,3) \}$

Eta bila dezagun alderantzizkoa:



$E^{-1} = \{ (1,a), (2,b), (3,e), (4,d), (5,c) \}$

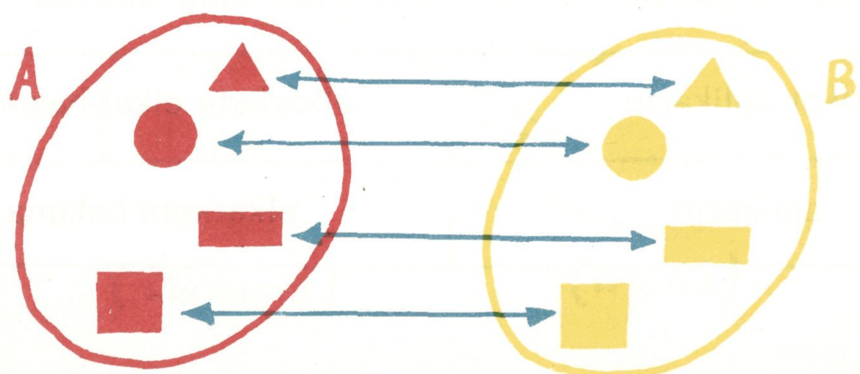
Beraz, oraingoan **bai E bai E^{-1}** APLIKAZIO dira.

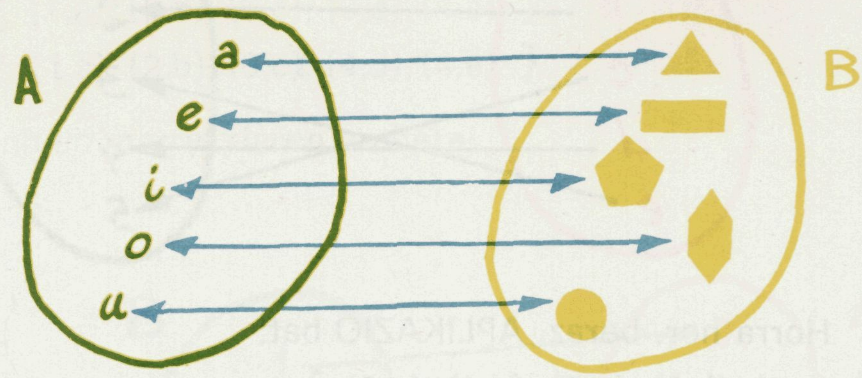
Elkarrekiko aplikazio sortzen duen elkarketa mota berezi honi ELKAR-APLIKAZIO deritza.

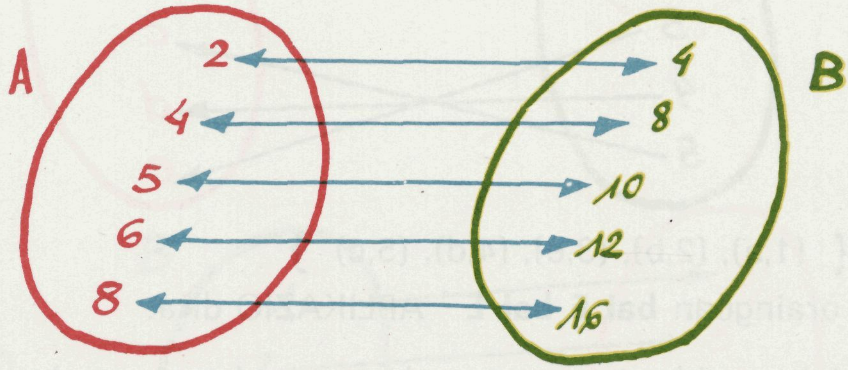
Eta, beraz, hau idatz dezakegu:

{elkar-aplikazioak} ⊂ {aplikazioak} ⊂ {elkarpide bakunak} ⊂ ⊂ {elkarpideak} ⊂ {cartestar elkarpidea}

5.9. — Hona hemen beste ELKAR-APLIKAZIO batzuk:







Eta hortaz, gogan hobeki atxikitzeko, hau idatz daiteke:

elkar aplikazio	elkarketa elkar-bakuna
aplikazio	elkarketa bakuna

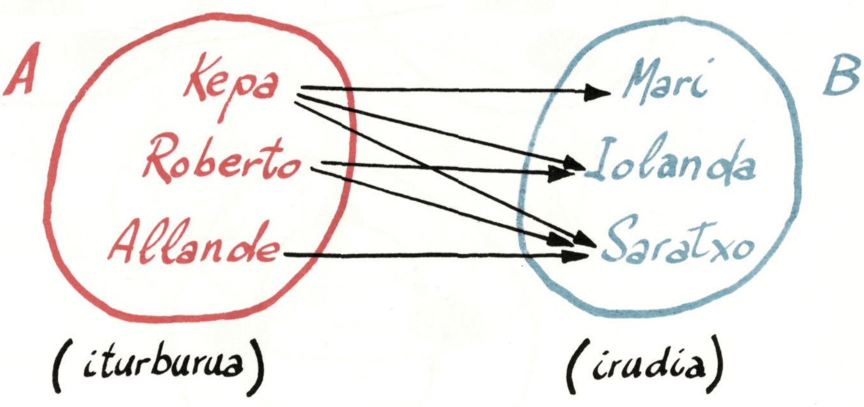
6 — BARNE-ELKARPIDEAK

6.1. — Orain arte BI multzotako elementuen arteko lotkiak aztertu ditugu, eta ELKARPIDEAK aipatu. Baina MULTZO BEREKO elementuen artean ere lotkiak gerta daitezke; eta hauei BARNE-ELKARPIDE derizte.

Esate baterako. Eman ditagun **bi** multzo, A eta B; eta idatz ditzagun bi talde horietakoen adinak:

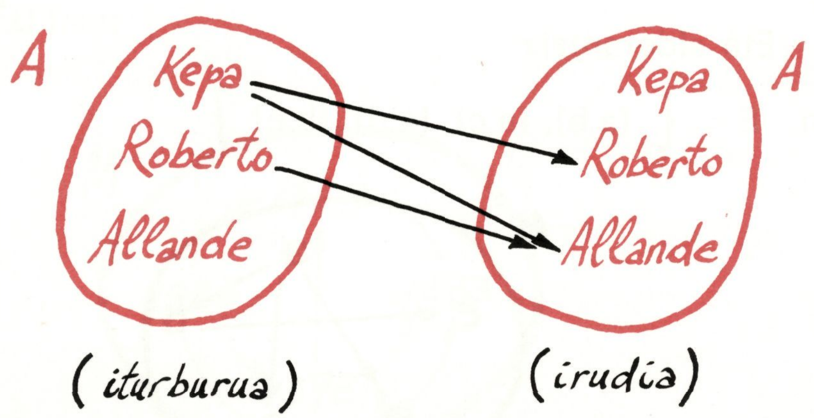
A))	Kepa , 16 urte	B))	Mari , 15 urte
	Roberto, 14 urte		Iolanda , 13 urte
	Allande, 12 urte		Saratxo, 9 urte

Eta geziek zaharrago deritzatelarik, egin dezagun kanpo-elkarpide horri dagokion taxuketa:

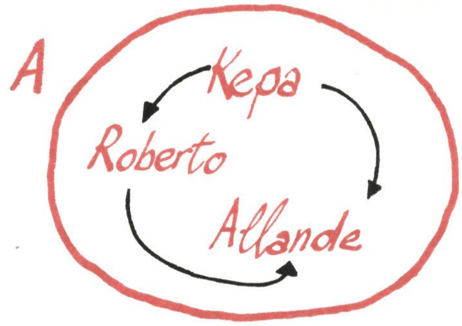


E = { (K,M), (K,I), (K,S), (R,I), (R,S), (A,S) }

Egin dezagun orain adin-taxuketa, baina A multzoaren barruan. Multzo irudi gisa **A** BERBERA izango dugu.



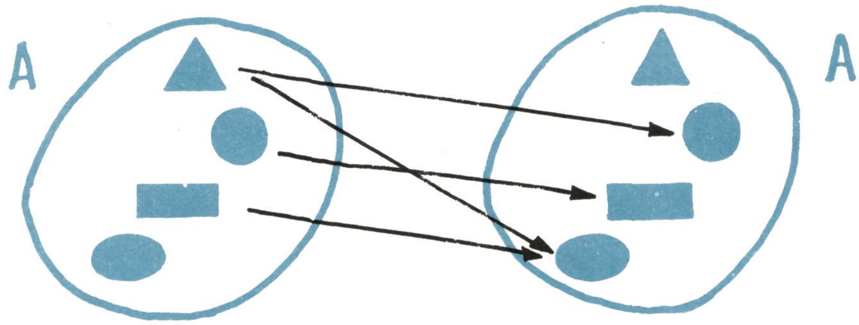
edo:



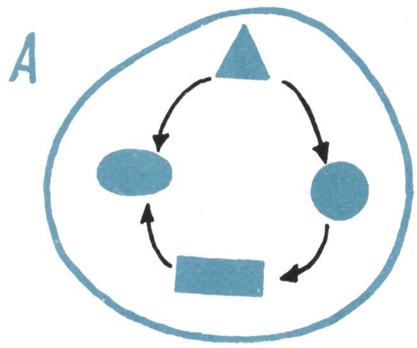
baita:

$$E = \{ (K,R), (K,A), (R,A) \}$$

6.2. — Eman dezagun Venn-en marrazki hau. Bila dezagun aurrenik irudi bakarreko **«grafoa»:**



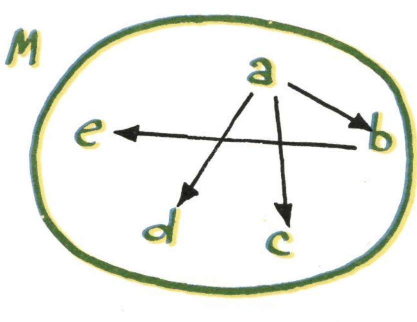
Hortaz:

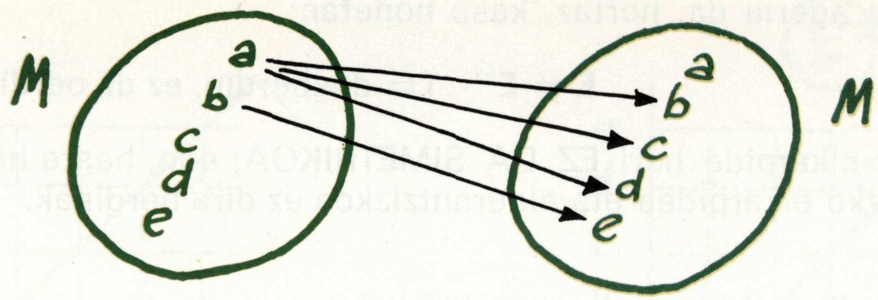


E = {(▲, ●), (●, ▬), (▬, ●), (▲, ●)}

Eta alderantziz:

Baldin $E = \{ (a,b), (a,c), (a,d), (b,e) \}$





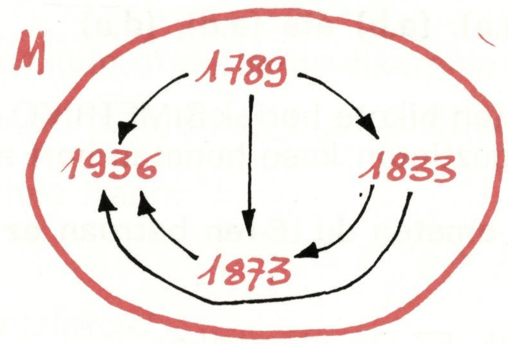
6.3.— Eman dezagun urte mordo hau:

$U = \{ 1833, 1789, 1936, 1873 \}$

eta idatz ditzagun **lehenago** bikoteak:

$E = \{ (1789, 1833), (1789, 1873), (1789, 1936), (1833, 1873), (1833, 1936) (1873, 1936) \}$

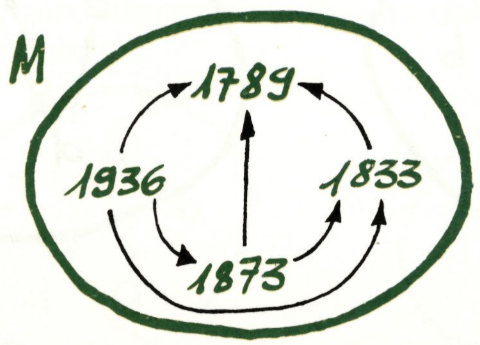
Marrazki bakar batez baliatuz, honela adieraz dezakegu taxuketa hori:



Idatz dezagun orain ALDERANTZIZKOA:

$E^{-1} = \{ (1833, 1789), (1873, 1789), (1936, 1789), (1873, 1833), (1936, 1833), (1936, 1873) \}$

Eta marrazki hau:



Gauza ageria da, hortaz, kaso honetan:

$$\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^{-1} \quad (= \text{desberdin, ez da berdin})$$

Barne-elkarpide hori EZ DA SIMETRIKOA; edo, beste hitzez esateko, jatorrizko elkarpidea eta alderantzizkoa ez dira berdinak.

6.4. — Ikus dezagun beste adibide hau:

$$A = \{ a, b, c, d, e \}$$

Eta egin dezagun orain barne taxuketa bat, elkarpide honen arabera:

$$E = \{ (a,b), (b,c), (b,a), (a,d), (b,e), (d,a), (e,d) \}$$

Elkarpide honen alderantzizkoa hau da:

$$E^{-1} = \{ (b,a), (c,b), (a,b), (d,a), (e,b), (a,d), (d,e) \}$$

Bikote batzuk, beraz, berberak dira biotan:

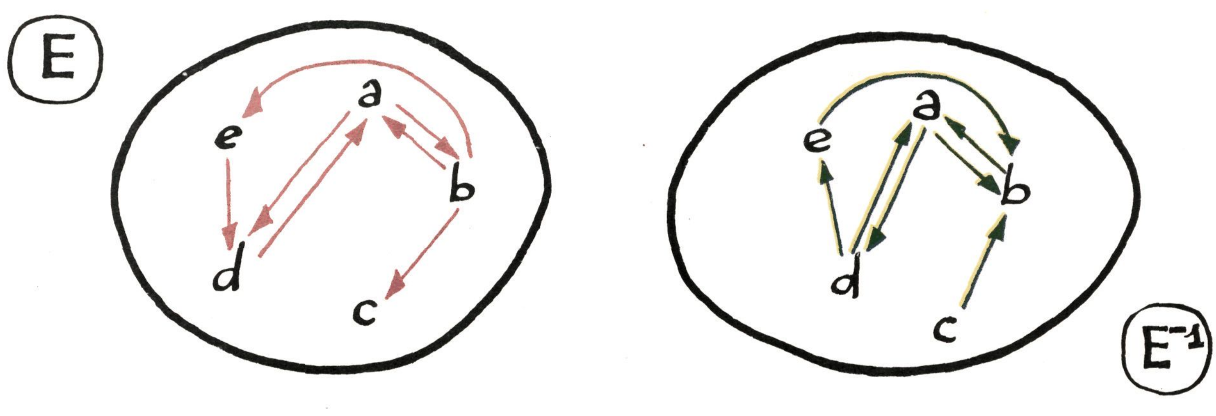
(b,a), (a,b) eta (a,d), (d,a)

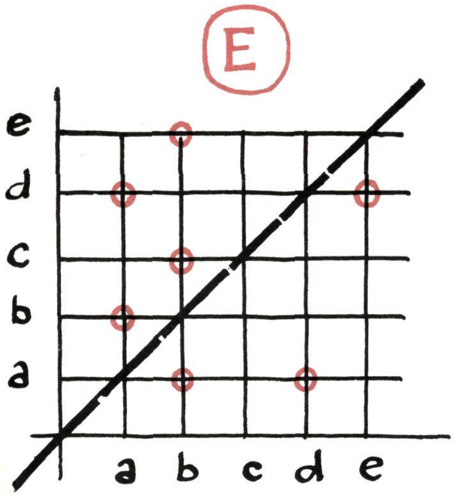
Alderantziketa batetan bikote horiek SIMETRIKO dira, eta elkar ematen dute; baina bikote guztietan kaso honetan hori ez gertaturik:

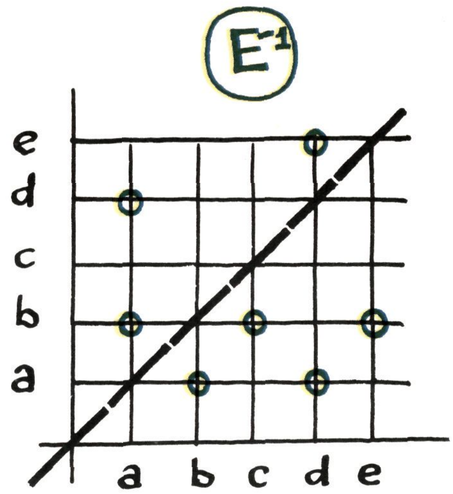
(b,c) bikoteak (c,b) ematen du (E-ren barruan ez zena), eta era berean (b,e) eta (e,d)

elkarpidea, osoki harturik, EZ DA simetrikoa.

Adieraz ditzagun grafo batez eta cartestar ardatzez, E eta E^{-1} elkarpideok:



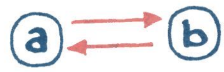




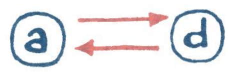
Elkarpide horren LAU bikote, beraz, SIMETRIKO DIRA binaka, eta alderantziketan ez dira aldatzen. Beste hirurak bai, eta elkarpidea ez da simetrikoa:

$$\mathbf{E} \neq \mathbf{E}^{-1}$$

Bikote simetrikoetan, beraz, hau dugu:



(a,b) // (b,a)



(a,d) // (d,a)

6.5. — Eman dezagun orain barne-elkarpide hau:

E = { (a,c), (a,d), (c,a), (d,e), (d,a), (e,d), (a,e), (e,a) }

oinarrizko multzoa hau izanik:

A = { a, b, c, d, e }

Zein da alderantzizkoa?

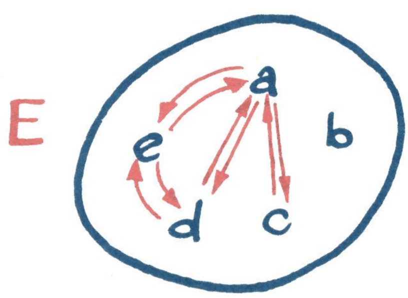
E^{-1} = { (c,a), (d,a), (a,c), (e,d), (a,d), (d,e), (e,a), (a,e) }

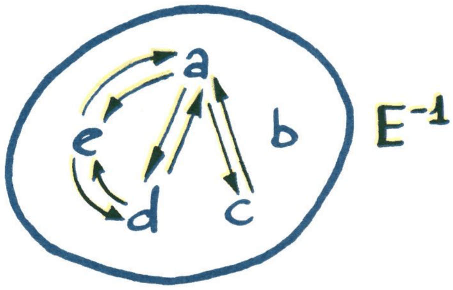
Hots, bi elkarpide horiek arretaz begiratuz gero, hau ageri da: bikote BERBERAK daudela bietan; eta, hortaz, ALDERANTZIZKO ELKARPIDEA (E^{-1}) eta jatorrizkoa (E) BERBERAK direla:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1}$$

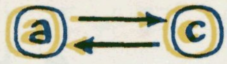
Ezagugarri hori duten barne-elkarpideei SIMETRIKO derizte.

Ikus dezagun orain, marrazki bidez eta cartestar ardatzen bidez, **simetria** hori zertan datzan:



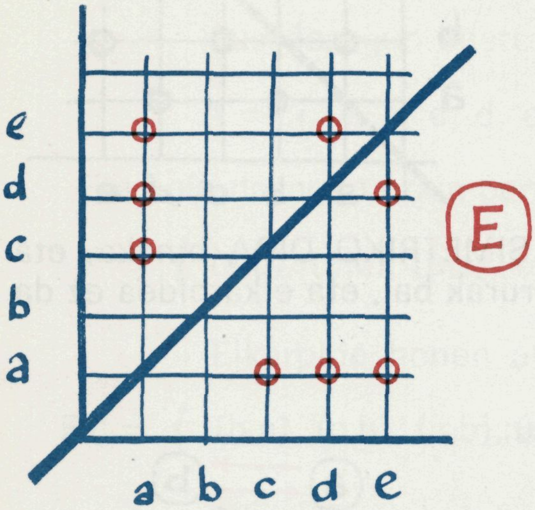


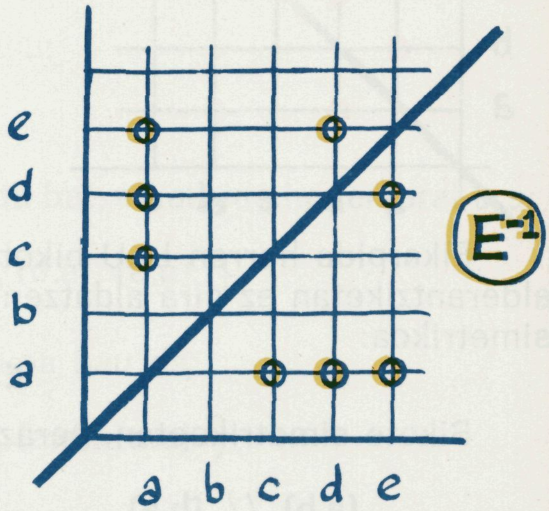
Lotkia guztiak BIKOITZAK dira:



tankerakoak; eta beraz **a** eta **c** loturik baldin badaude, **c** eta **a** ere bai.

Ikus dezagun orain cartestar ardatzetan:





Eitea SIMETRIKOA da erdiko zuzenaren arabera. Zeure burua ispiluan begiratzen duzularik, zu zeu eta irudia simetriko dira; zure bi eskuak simetriko dira; eta M letra simetriko ere bai:

6.6.— Har ditzagun orain (a,a), (b,b), (c,c), ata abar, bikoteak. (a,a) bikoteak hau adieratzen du: E elkarpidea **a** elementuari ezarri, eta **a** elementua ematen duela.

Esate baterako: $\times$ **1** eragiketa. Gauza ezaguna da:

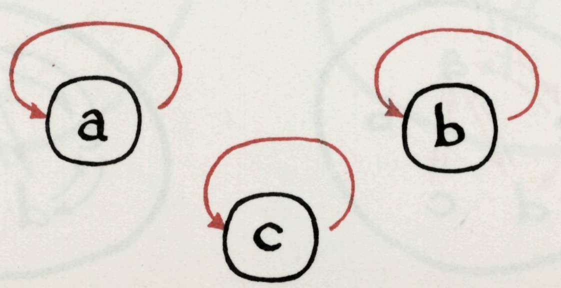
$$2 \times 1 = 2;\ 3 \times 1 = 3;\ 14 \times 1 = 14;\ \text{eta abar.}$$

Eragiketa horrek, horretara, BEREN HARTAN uzten ditu elementuak.

Gauza bera **: 1** eragiketa:

$$2 : 1 = 2;\ 5 : 1 = 5;\ 37 : 1 = 37;\ \text{eta abar.}$$

Kaso honetan, beraz, hauxe da marrazkia:



Alegia, eragiketak BIHUR ERAZI egiten ditu elementuak beren burura; eta, hortaz, 'boomerang' matematiko hau bihur-elkarpide edo ELKARPIDE BIHURKORRA bataia daiteke.

Eman dezagun $A = \{ a, b, c, d, e \}$ multzoa.

Eta eman dezagun barne-elkarpide hau:

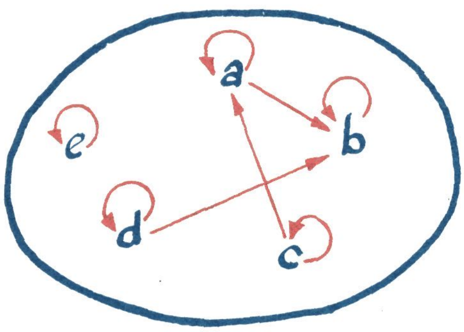
$E = \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e) \}$

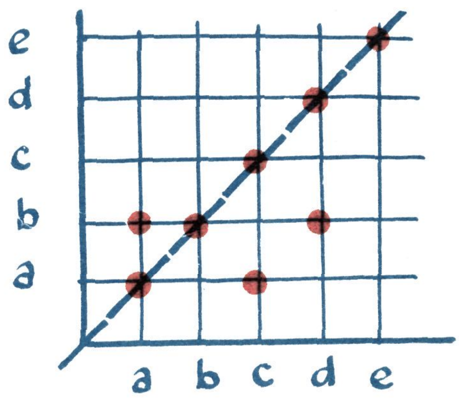
Elementu BAKOITZA BERE BURUARI LOTURIK agertzen da. Eta hortaz elkarpide BIHURKORRA da.

Eman dezagun beste elkarpide hau:

$E = \{ (a,a), (a,b), (c,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (d,b) \}$

Egin ditzagun Venn-en eta Descartes-en marrazkiak:



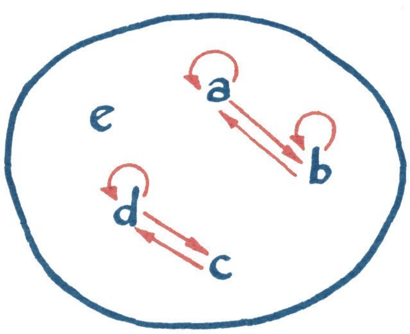


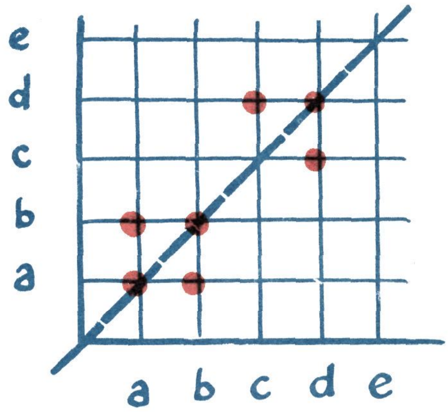
Elkarpide hau BIHURKORRA da(elementu GUZTIAK daude beren buruarekin loturik) baina ez da simetrikoa: $E \neq E^{-1}$.

Eman dezagun beste hau berriz:

$F = \{ (a,a), (a,b), (c,d), (b,b), (b,a) (d,c), (d,d) \}$

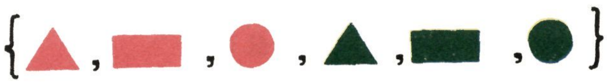
Egin ditzagun marrazki berberak:





F elkarpidea SIMETRIKOA da (= alderantzizkoa berbera da, eta $E = E^{-1}$); baina EZ DA BIHURKORRA (**c** eta **e** elementuak ez daude beren buruarekin loturik).

6.7. — Zer da, beraz, ondoko elkarpide hau?

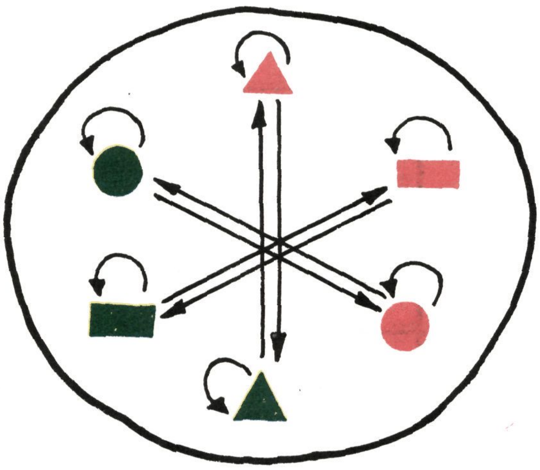
M = 

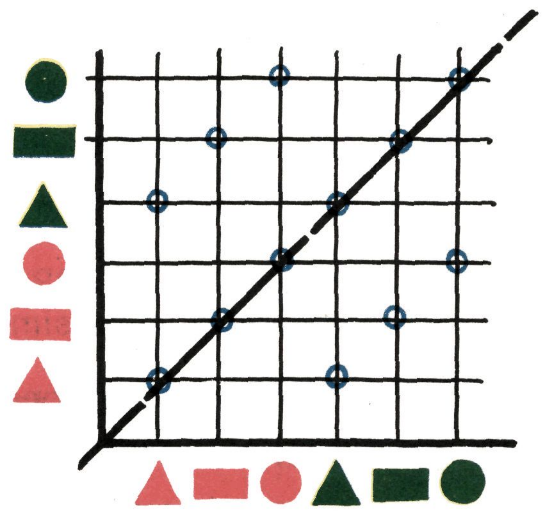
eta E = 

Elkarpide hori SIMETRIKOA da:

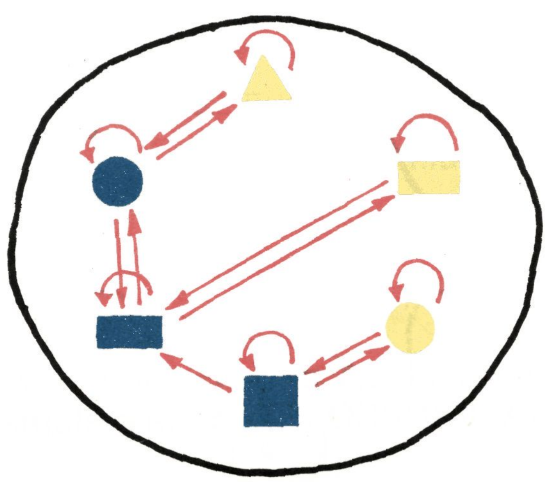
$$E = E^{-1}$$

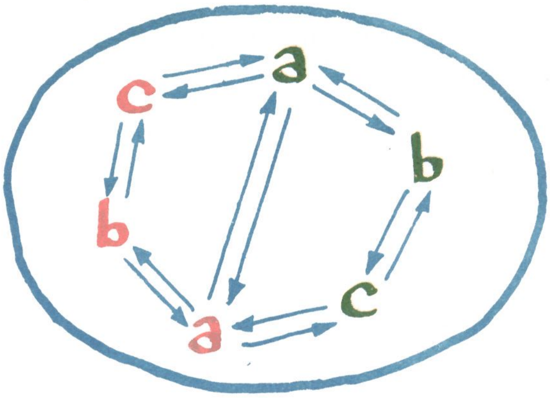
eta BIHURKORRA ere bai.

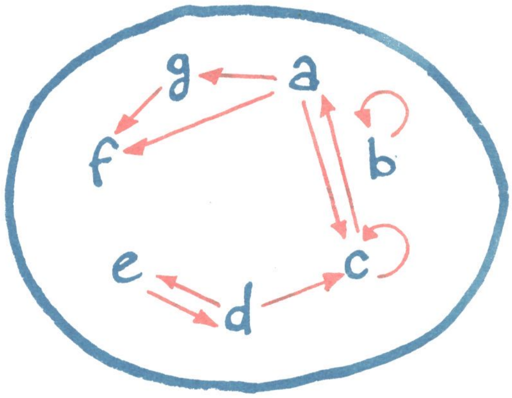


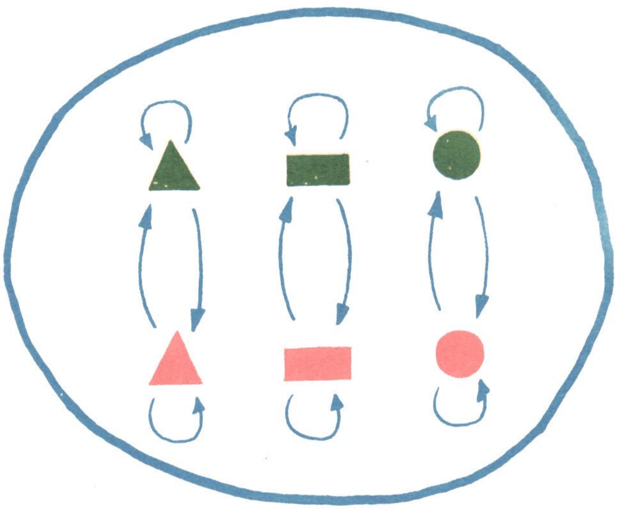


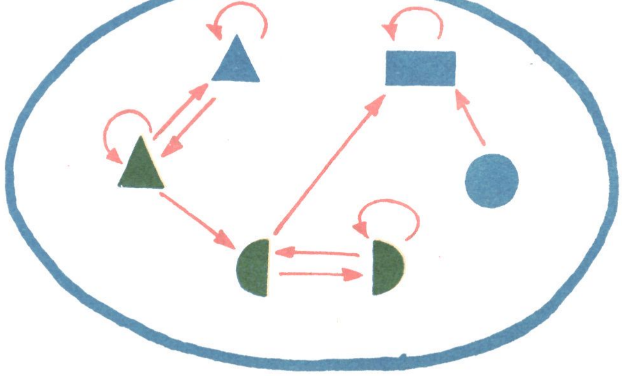
6.8. — Simetrikoak ahal dira ondoko elkarpideak? Bihurkorrak ahal dira? Zergatik?




a
c
b
b
c
a


g
a
f
b
e
c
d





6.9. — (6.2.) puntuko multzoa oinarritzat harturik, egin dezagun **A** × **A** cartestar elkarketa:

A = { ▲ , ● , ■ , ⬬ }

A×A = { ▲▲ , ▲● , ▲■ , ▲⬬ , ●▲ , ●● ,
●■ , ●⬬ , ■▲ , ■● , ■■ , ■⬬ ,
⬬▲ , ⬬● , ⬬■ , ⬬⬬ }

Cartestar elkarketa honek (**A** × **A** edo $\mathbf{A}^2$ idatzia) 4 × 4 = 16 bikote ditu.

Eman dezagun orain edozein barne-elkarpide:

E = { ●● , ●⬬ , ⬬▲ , ■● , ■▲ , ▲⬬ , ■■ }

Zazpi bikote horiek cartestar elkarketaren BARRUAN daude; eta hortaz:

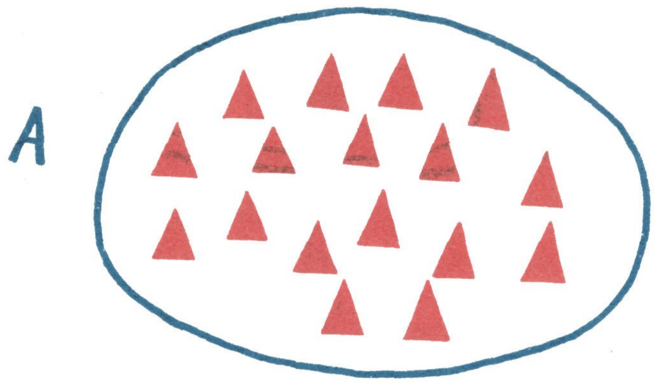
$$\mathbf{E} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$$

A multzo bat oinarri harturik, haren EDOZEIN barne elkarpide CARTESTAR ELKARPIDEAREN AZPI-MULTZO BAT DA:

$$\mathbf{E} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$$

7 — ZENBAKUNTZA

7.1. — Eman dezagun multzo hau:

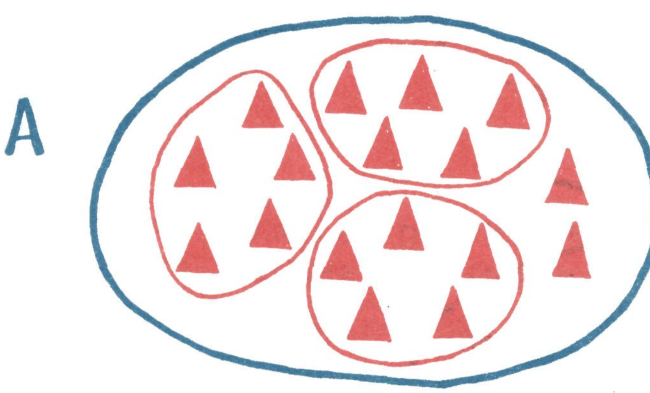


Banan banan zenbatuz gero, triangulu kopuru gisa hau dugu: HAMAZAZPI.

«Hamazazpi» euskal hitza oraindik luzeegia ez bada ere, «mila-ta-bederatzirehun-eta-hirurogei-ta-hamahiru» hitza luzeegia da benetan; eta, gauza ageria da, beti multzoen kopurua HITZEN bitartez ezin erabilirik, ZENBAPIDE BAT asmatu da. Aurreko ikastaroetan ikusia dugu arazo hau.

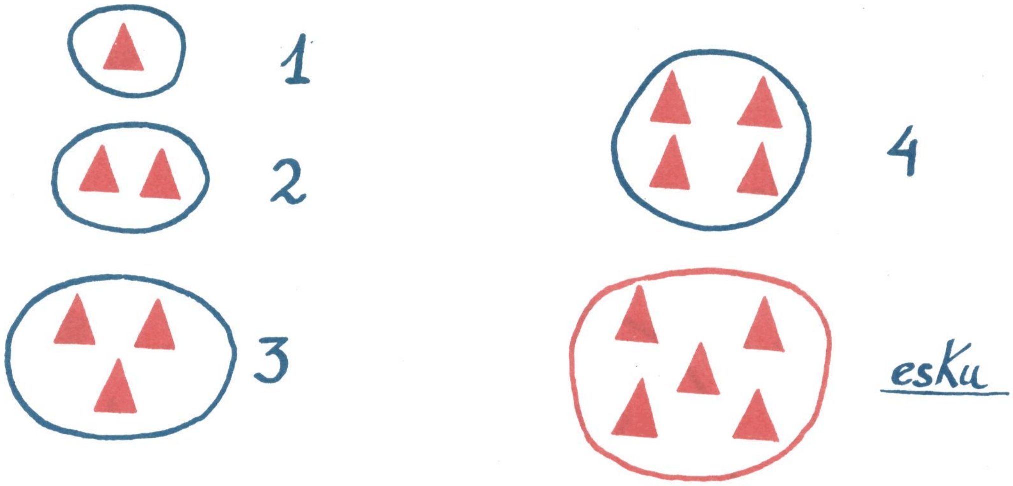
Multzoen zenbakuntza, horretara, aspaldiko kezka da gizonarengan; eta aspaldidanik asmatu ditu gizonak zenbapide batzuk.

Eman dezagun arestian ikusi dugun A multzoa. Eta molda ditzagun, elementuak soka gorri batez bilduz, «eskuak». Alegia BOST alez «esku» bat moldatuko dugu (muslariek «bostekoak» moldatzen dituzten bezalaxe); eta hau dukegu:



Baditugu, beraz, multzoaren zenbakuntzan: hiru ESKU eta bi ERI libro.

Eskuaren eri-kopuruei ikur bana emanez gero:

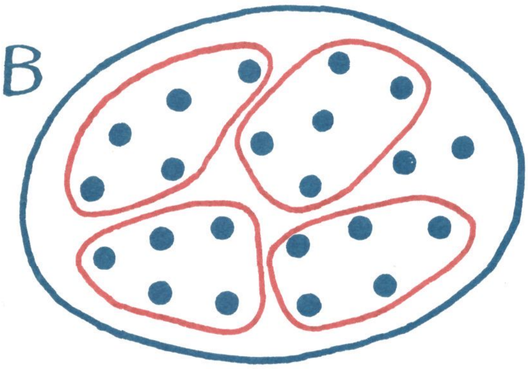


hau idatz dezakegu:

	esku	eri
Ƶ(A)	3	2

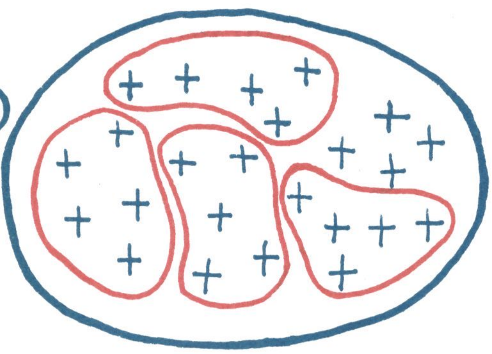
eta era berean:

B



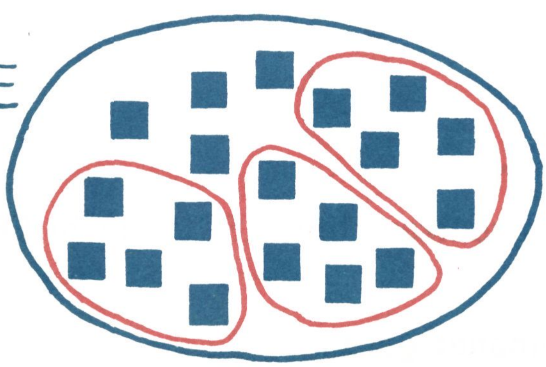
	esku	eri
Ƶ(B)	4	2

D



	esku	eri
Ƶ(D)	4	4

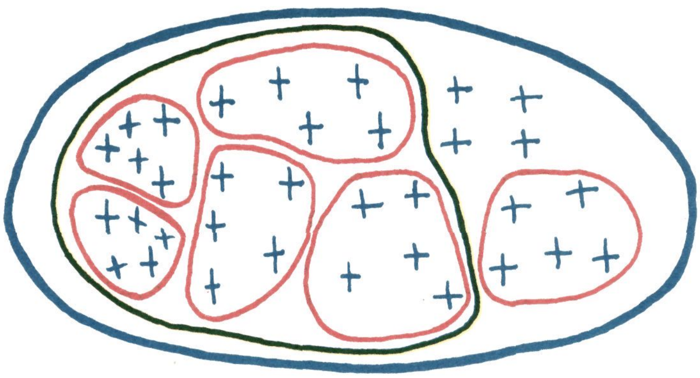
E



	esku	eri
Ƶ(E)	3	4

— Eman dezagun orain beste multzo hau:

F



Badakigu, beraz, bost esku eta lau eri dituela. Bost esku horiek, horrela, BIGARREN MAILAKO banako gisa hartuz gero, «bir-esku»bat osa dezakete, bost alek edo banakok esku bat osatzen duten bezalaxe; eta taxuketa hau izango dugu:

	bir-esku	esku	eri
Z(F)	1	1	4

Eta horretaz:

$$Z(F) = 114$$

Elementuak BOSNAKA biltzen ari garenez gero, BOSTA oinarri ari gara multzoa zenbatzen; eta, idazkera arinduz, hau idatz genezake:

5// Z(A) = 32
Z(B) = 42
Z(D) = 44
Z(E) = 34
Z(F) = 114

Kasu hemen! Iaz azaldu genuen bezala, «32» zenbakia «hiru-bi» irakurri behar da; eta ez inolaz ere «hogei-ta-hamabi». Kasu batetan, eta ez beste inoiz, balio du «32» idazkera horrek hogei-ta-hamabi hain zuzen: oinarria HAMAR denean.

Esate baterako:

bost // 32 = 3 esku + 2 eri = hamazazpi
sei // 32 = 3 seiko + 2 bateko = hogei

bederatzi // 32 = 3 bederatziko + 2 bateko = hogei-ta-bederatzi eta abar.

Idazkera BAKAR BATEK, hortaz,zenbapidearen arabera aldatuz, beste hainbeste balio desberdin adieraz dezake.

«32» idazkerak, esate baterako, eta ikusi dugunez, hamazazpi, hogei, eta hogei-ta-bederatzi adieraz dezake (bost, sei eta bederatzi oinarrietan); baita HAMARREKO OINARRIAN (eta ez bestetan, beraz) HOGEI-TA-HAMABI ere:

hamar // 32 = 3 hamarreko + 2 bateko = hogei-ta-hamabi.

Ez da, hortaz, «32» idazkera hogei-ta-hamabiren kide hertsia, HAMARREKO ZENBAPIDEAN EZ BESTETAN adierazten duen kopurua baizik. Kontuz!

7.2. — Zenbat ikur edo sinu behar da zenbakiak idazteko?

Oinarritzat BOST hartzen bada (eskua, beraz), BOST ikur behar dira hain zuzen:

bat = «1»
biga = «2»
hiru = «3»
lau = «4»
zero = «0»

Era berean HIRU oinarrian idazteko, HIRU ikur behar dira hain zuzen:

bat = «1»
biga = «2»
zero = «0»

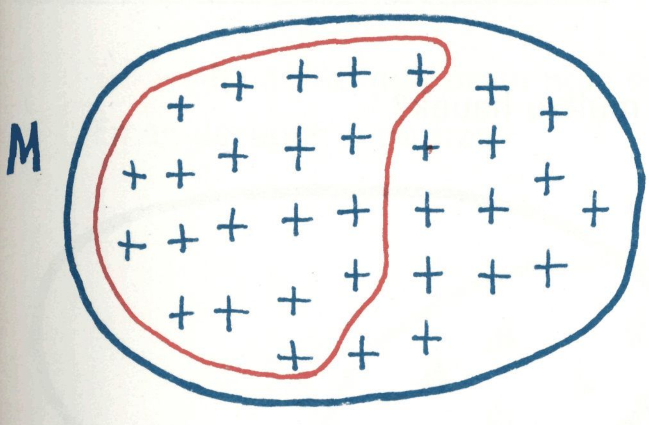
Eta HAMARREKO zenbapidean,jakina denez, hamar ikur, halako batez arabitarrek asmatuak: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, eta 0.

HOGEI-oinarian idazteko, beraz, hogei ikur behar lirake, 'O' barne:

bat = «1»
biga = «2»

hiru = «3»
lau = «4»
bost = «5»
sei = «6»
zazpi = «7»
zortzi = «8»
bederatzi = «9»
hamar = A (eman dezagun)
hamaika = B
hamabi = C
hamahiru = D
hamalau = E
hamabost = F
hamasei = G
hamazazpi = H
hemezortzi = J
hemeretzi = K
zero = «0»

eta hau genuke:



	hogeiko	banako
Z (M)	1	D

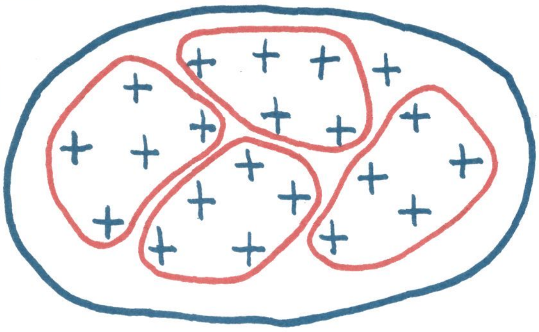
Z(M) = 1D

Jakina: **edozein oinarritan, oinarria bera «10» idazten da.** Eta gisa da. Zeren-eta «10» (bat-zero) horrek hau adierazten baitu: ale soilik ez dagoela (= 0), eta oinarria osatzen duen multzo BAT dagoela (= 1). Horretatik, beraz, BETI, «10» idaztea.

2 // 10 = bi
5 // 10 = bost
hamar // 10 = hamar

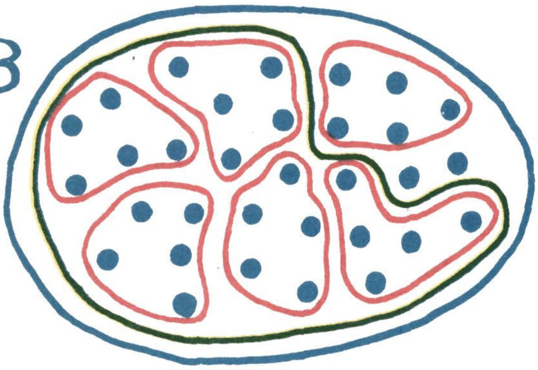
7.3. — Egin ditzagun orain ariketa batzuk zenbapidearen oinarritzat BOST hartuz:

A



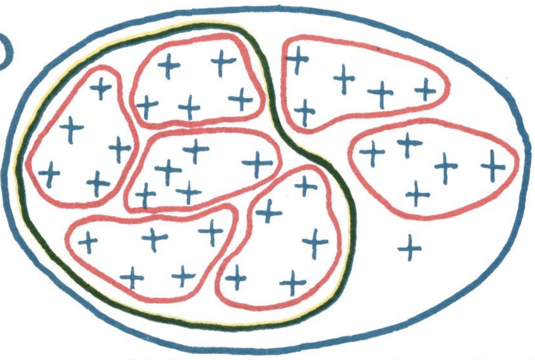
	esku	eri
Z(A)	4	1

B



	bir-esku	esku	eri
Z(B)	1	1	2

D

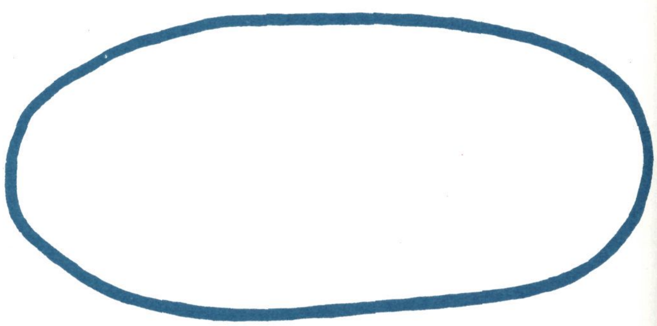


	bir-esku	esku	eri
Z(D)	1	2	1

— Alderantziz, zenbat ale dute multzo hauek?

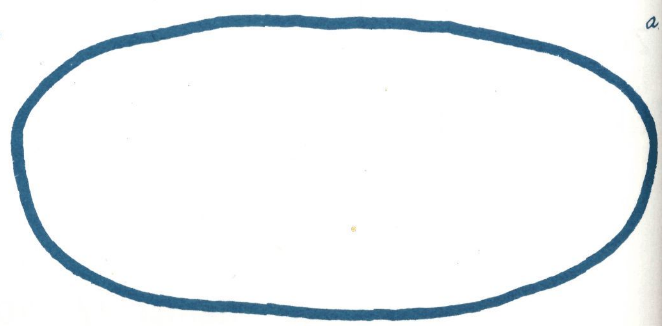
M

$Z(M) = 34$

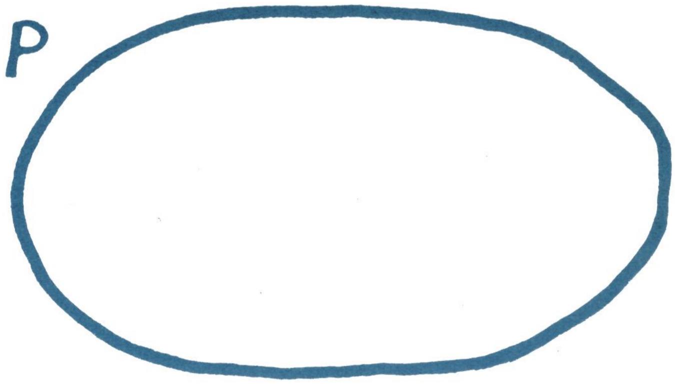


N

$Z(N) = 14$



$Z(P) = 102$

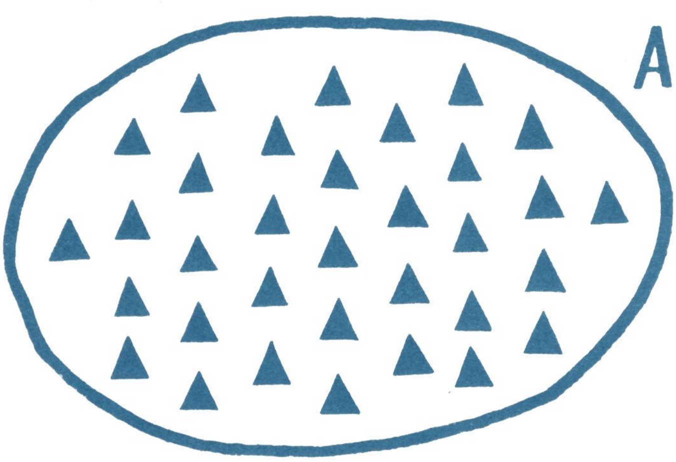


7.4. — BOST oinarritzat, ondoren ematen diren zenbakietan bi dira faltsu, eta lau egoki. Zein dira hauek eta haiek, eta zergatik.

$$
\text{BOST} // \quad \begin{aligned} Z(A) &= 35 \\ Z(B) &= 102 \\ Z(C) &= 206 \\ Z(D) &= 11 \\ Z(E) &= 100 \\ Z(F) &= 303 \end{aligned}
$$

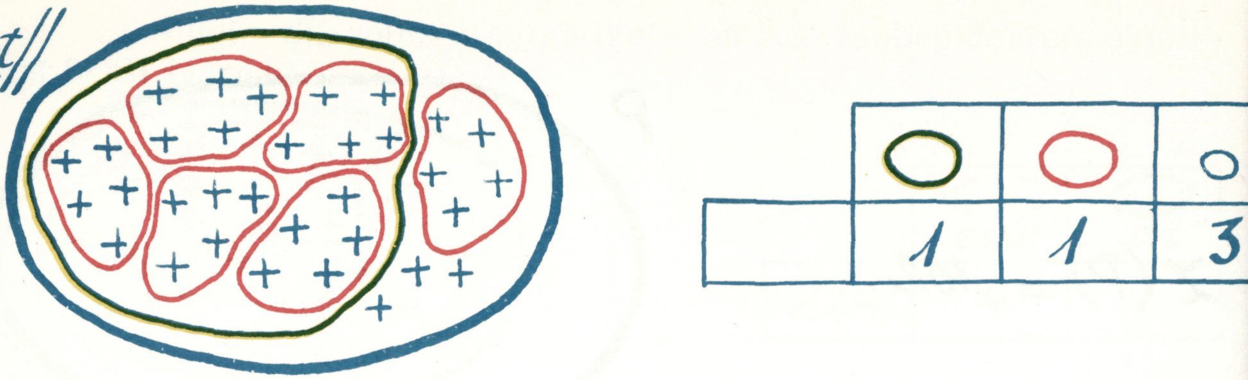
7.5. — Ikus dezagun orain nola egin daitekeen OINARRI-ALDAKETA.

Eman dezagun A multzoa:

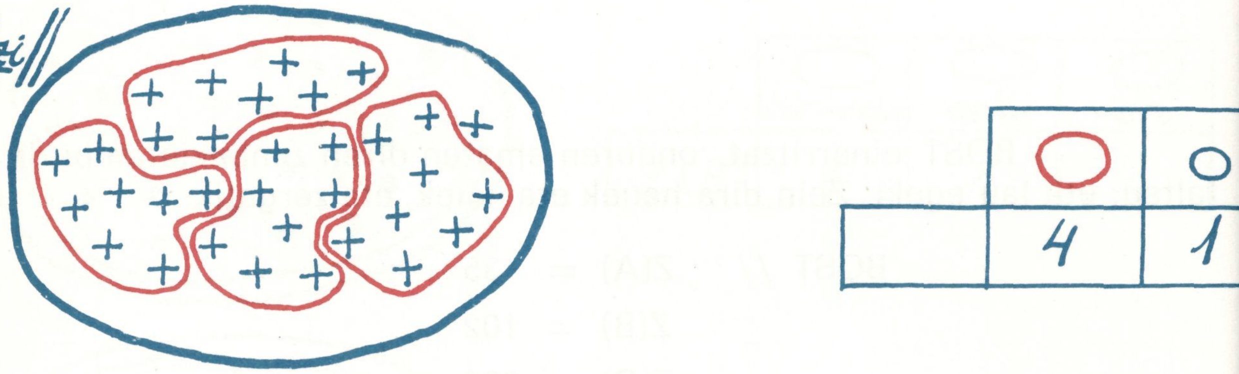


Idatz dezagun segidan Z(A), oinarritzat txandaka BOST, ZORTZI, BIGA eta HAMAR hartuz:

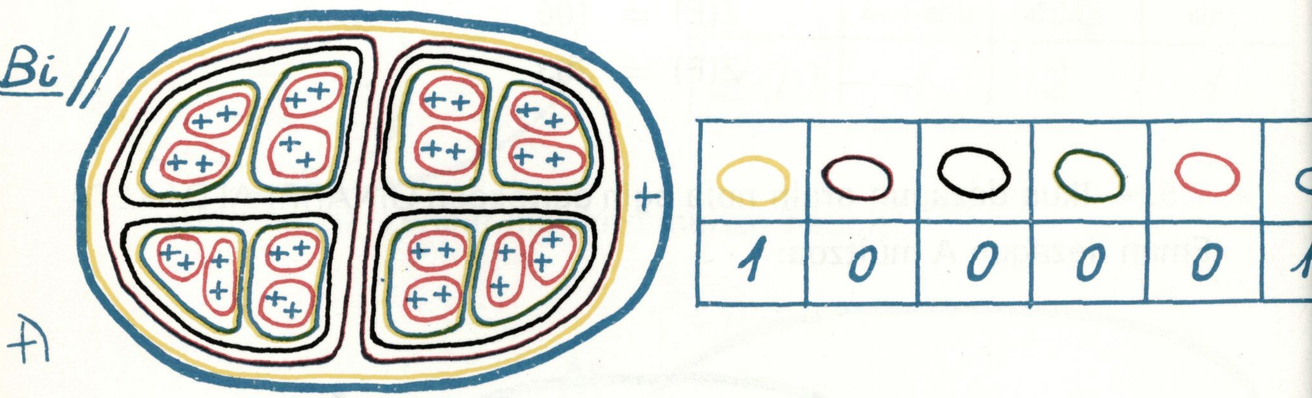
Bost//



Zortzi//

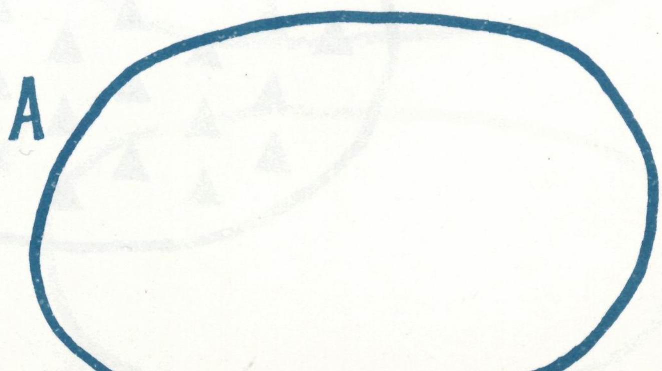


Bi//



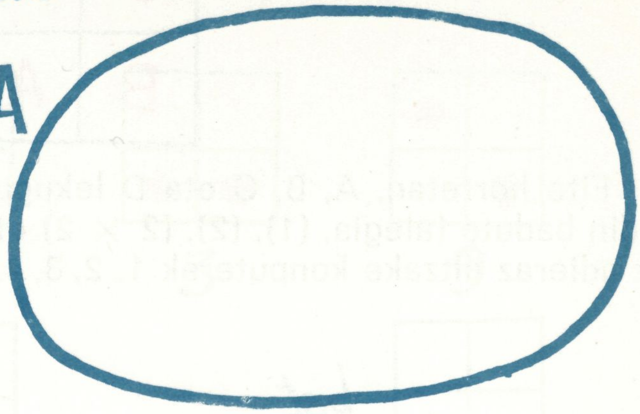
Eta alderantziz

$5// \therefore Z(A) = 113$



Zortzi// Z(A)=113

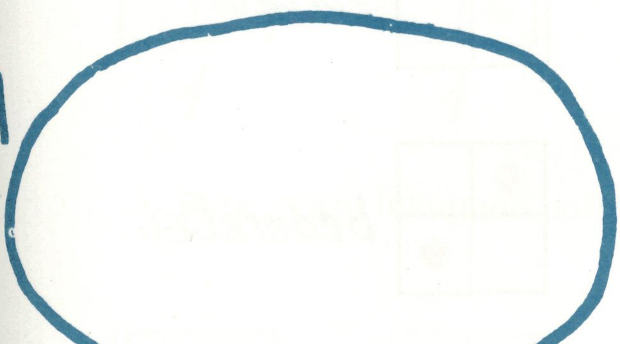
A



— Eman dezagun orain Z(M) = 114, BOST oinarri. Nola idatz hori BI oinarrian?

$$
\begin{array}{rlll}
114\ (5\ //) = & 1\ . & (5 \times 5) = & \text{hogei-ta-bost} \\
 & 1\ . & (5) = & \text{bost} \\
 & 4\ . & (1) = & \text{lau} \\
 & & & \text{hogei-ta-hamalau}
\end{array}
$$

A



1. (2×2×2×2×2)
0. (2×2×2×2)
0. (2×2×2)
0. (2×2)
1. (2)
0. (1)

beraz, Z(M) = $\underline{\underline{1\,0\,0\,0\,1\,0}}$ (2 //)

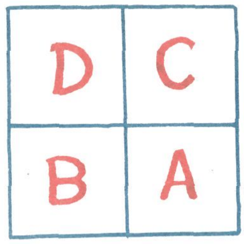
eta oinarria HAMAR izanik:

3 . (hamar) + 4.(1) ... Z(M) = **34** (hamar //)

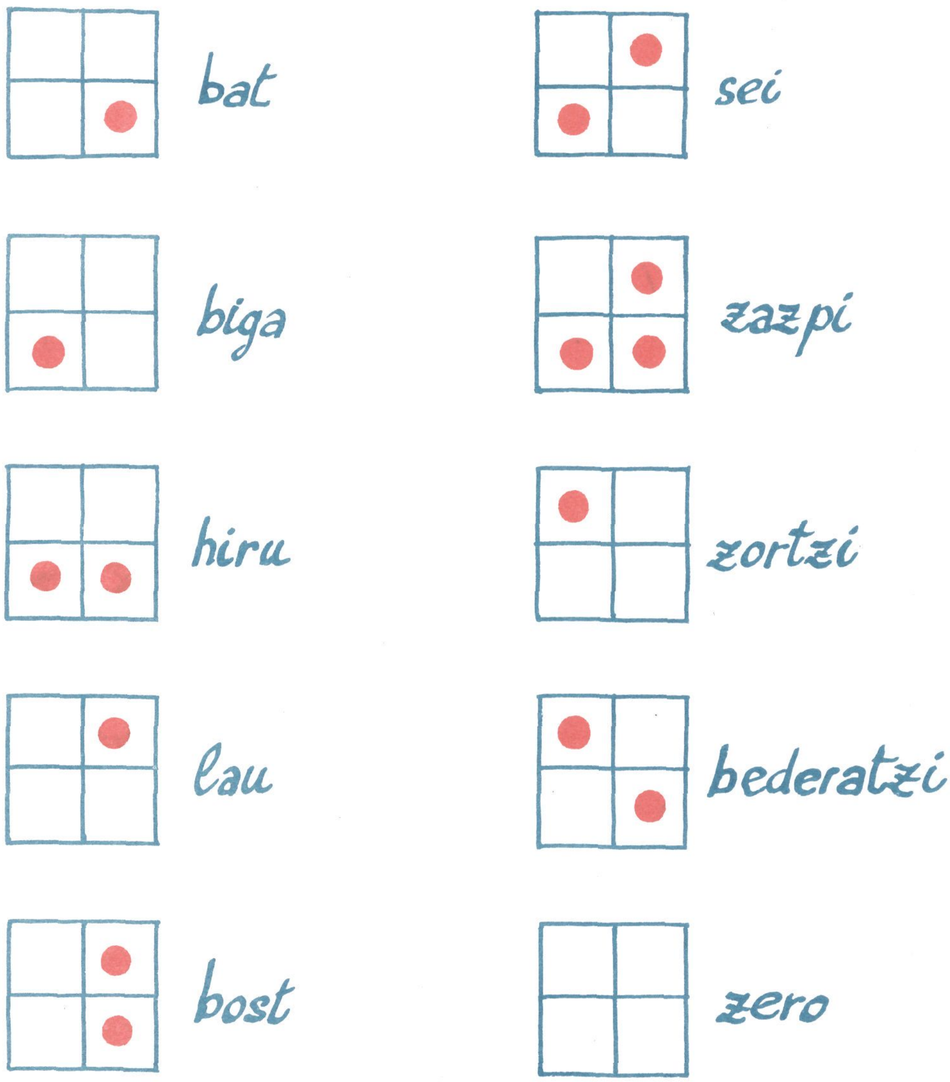
Jakina denez, Mendebaldeko zibilizazioan HAMAR hartu da zenbakuntzaren oinarri; eta eskuarki ikusten ditugun zenbakiak OINARRI horren arabera idatzirik daude.

7.6. — Konputeretan, ordea, jakina denez, eta eletrikaren IGARO/EZIGARO bikotea dela-ta, BI erabiltzen da oinarritzat.

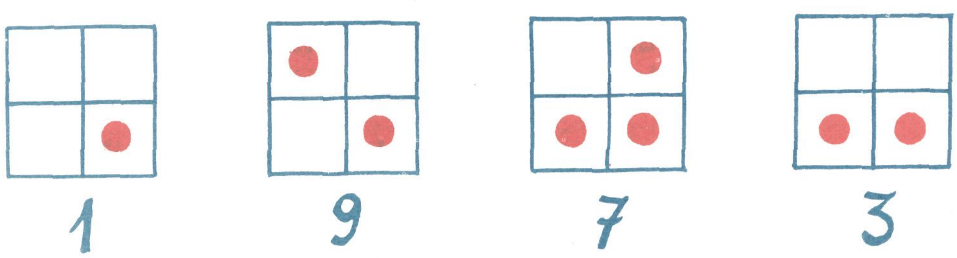
Eman dezagun, esate baterako, ondoko eite hau:



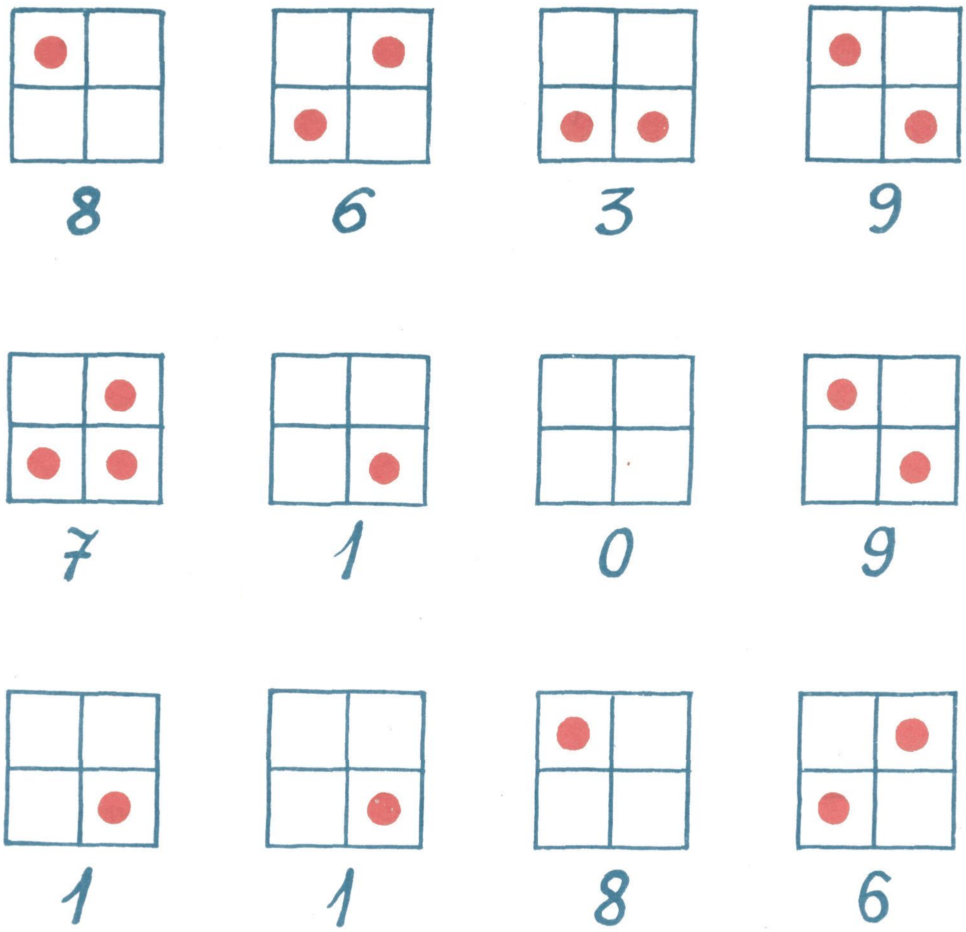
Eite horretan, A, B, C eta D lekuguneek (1), (2), (4) eta (8) balio baldin badute (alegia, (1), (2), (2 × 2) eta (2 × 2 × 2)) argikeraren bidez adieraz ditzake konputerak 1, 2, 3, 4, ... 9, eta 0. Honela :



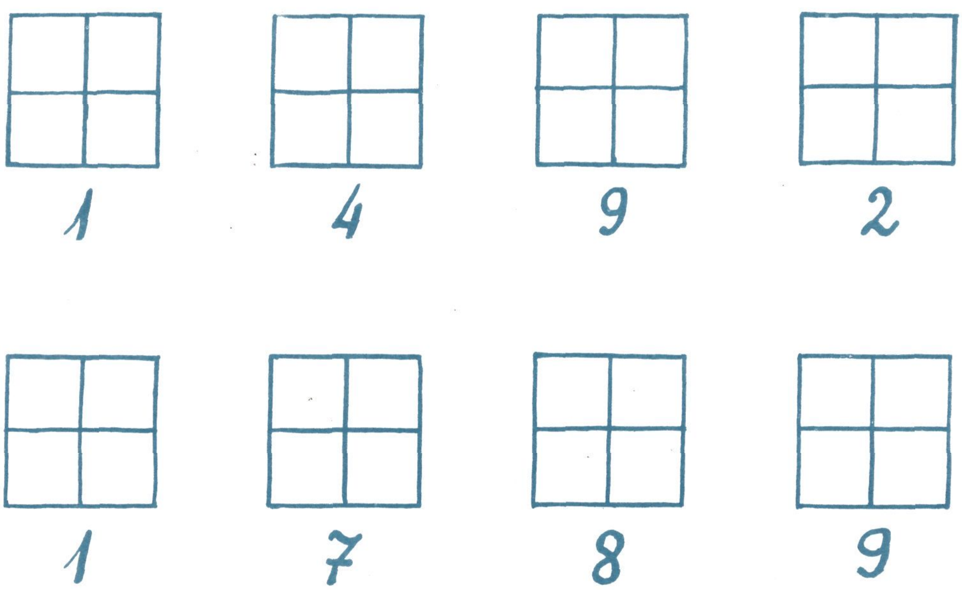
Eta konputeraren argigailu horretan, honela irakurriko genuke aurtengo urtea.

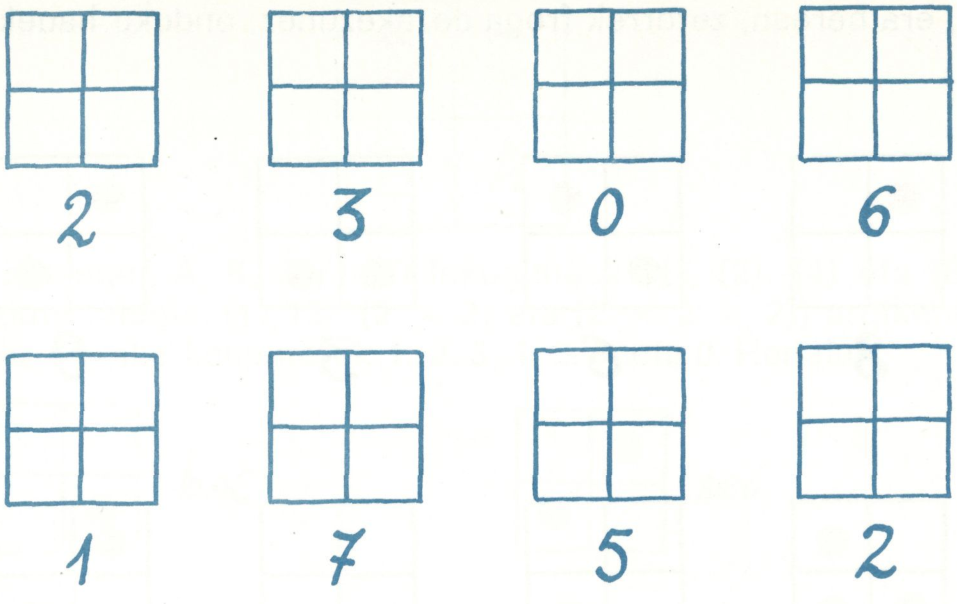


Eta, era berean, zerorrek froga dezakezunez, ondoko hauek:

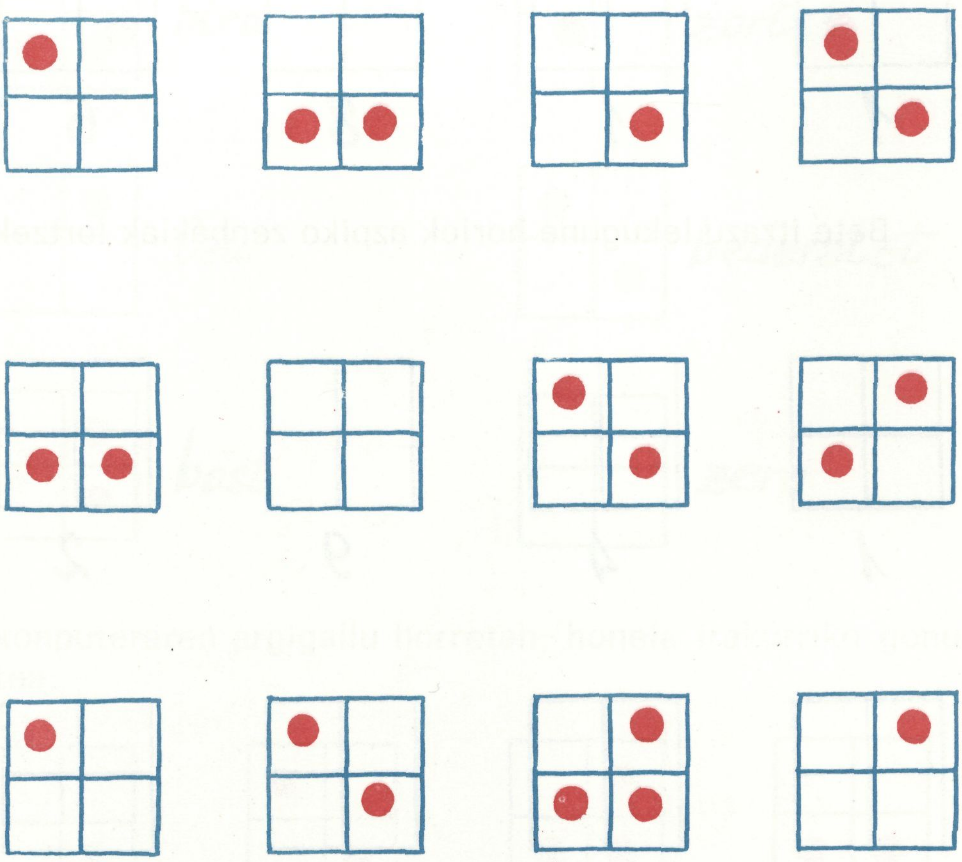


7.7. — Bete itzazu lekugune horiek azpiko zenbakiak lortzeko:





7.8. — Alderantziz orain: konputerera joan zara, eta honela aurkitu dituzu lekuguneen argiak. Zein zenbaki adierazten du kaso bakoitzean?



7.9. — Ondoko zenbakiak oro HAMAR oinarriaren arabera idatzirik daude. Idatz itzazu orain BOST oinarriaren arabera:

$$Z(A) = 31$$

$$Z(B) = 102$$

$$Z(D) = 75$$

$$Z(E) = 26$$

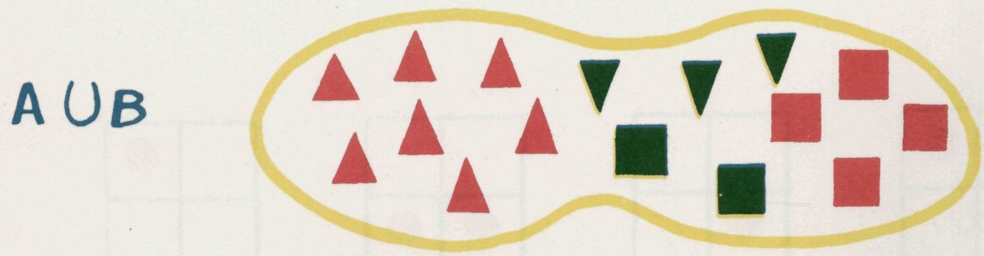
$$Z(F) = 100$$

$$Z(G) = 206$$

8 — BAKETA

8.1. — Multzoen BILKETA eta beroien kardinalen BAKETA, aurreko urteetan ikusia dugunez, loturik daude; baina ez nolanahi. Eta on izango da ideia funtsezko hau gogoraztea.

Eman ditzagun A eta B multzoak, eta presta dezagun $A \cup B$ bilketa:



Hiru triangulu berdeak, BATERA dira A-ko eta B-ko elementu:

▼ $\in A$

▼ $\in B$

Hots, multzoen bilketan (begira zazu aurtengo 2.5 puntua) aski da elementu bat A-ko **EDO** B-ko elementu izatea, BILKETAKO ELEMENTU ERE izan dadin. Bi multzoen bilketa «edo-keta» da, eta hala deitu dute gure arteko batzuek.

«Bi aldiz» agertzen diren triangulu berdeok, horretara, «bi aldiz» bezala sartu dira $A \cup B$ bilketan.

Eta horretatik dator ondorioa:

$$Z(A) = 10$$

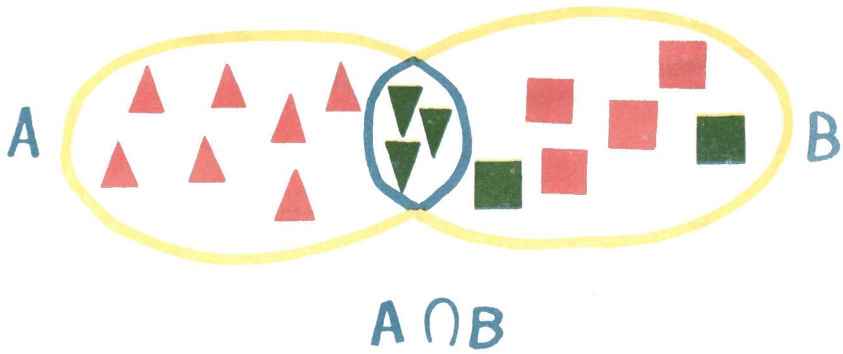
$$Z(B) = 9$$

$$Z(A \cup B) = 16$$

Baina $10 + 9 = 19$

Beraz, **Z (A $\cup$ B) $\neq$ Z(A) + Z(B)**

Ikus dezagun, hori ulertzeko, <u>**A $\cap$ B**</u> ebaketa



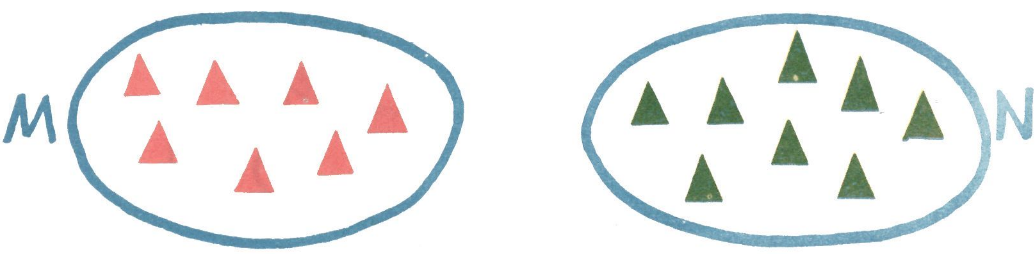
Beraz, **A $\cap$ B** = { ▲ , ▲ , ▲ }

Alegia, A eta B **ez dira multzo bereziak.**

A eta B multzo bereziak ez direnean, bilketa-multzoaren kardinala EZ DA kardinalen baketa:

Z (A $\cup$ B) $\neq$ Z (A) + Z (B)

8.2. — Kontutan har ditzagun, ordea, M eta N multzoak:

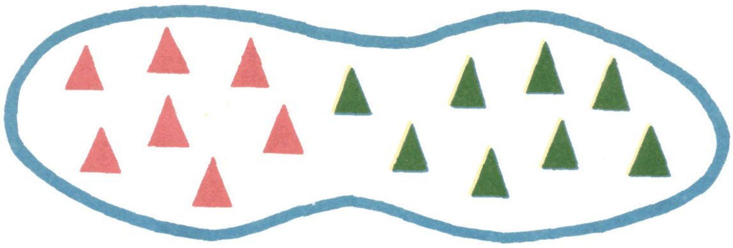


Zerorrek ikus dezakezunez:

M $\cap$ N = $\varnothing$

Alegia, ez dago elementurik BATERE M-ko **eta** N-ko batera denik. M eta N multzoak oraingoan BEREZIAK dira.

Egin dezagun <u>**M $\cup$ N**</u> bilketa



Eta orain hau dugu:

$$Z\,(M \cup N) = 7 + 8 = 15$$
$$Z(M) = 7$$
$$Z(N) = 8$$

Beraz orain $\mathbf{Z\,(M \cup N) = Z(M) + Z(N)}$

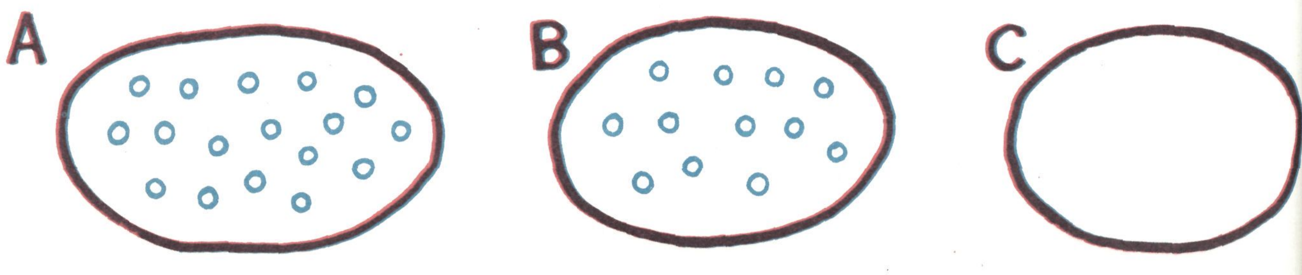
M eta N multzo BEREZIAK direnean, bilketa-multzoaren kardinala eta bi multzo berezien kardinalen baketa, BERDINAK dira.

8.3. — Eman dezagun orain dirua zenbatzen ari zarela, eta A, B eta C hiru moltsetan diru-txanpon hauek aurkitu dituzula:

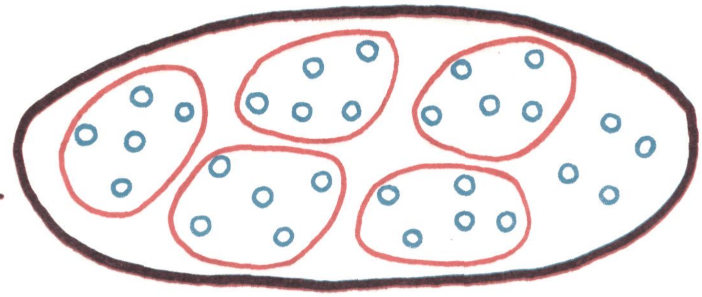
	25	5 hogerleko	1 pezeta
A	3	8	17
B	2	0	12
C	2	3	0

Guztira sos gehiegi ikusirik, denaren baketa egin, eta sos txikiak handiagoen truke ematea erabaki duzu. Nola egingo zenuke kondua?

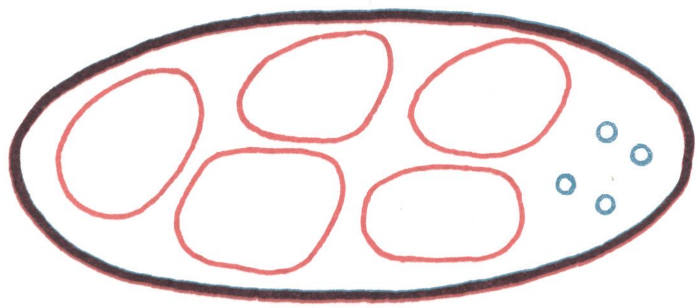
Pezeta bateko txanponak zenbatuko zenituzke aurrenik, eta honela moldatuko eginkizuna :



AUBUC

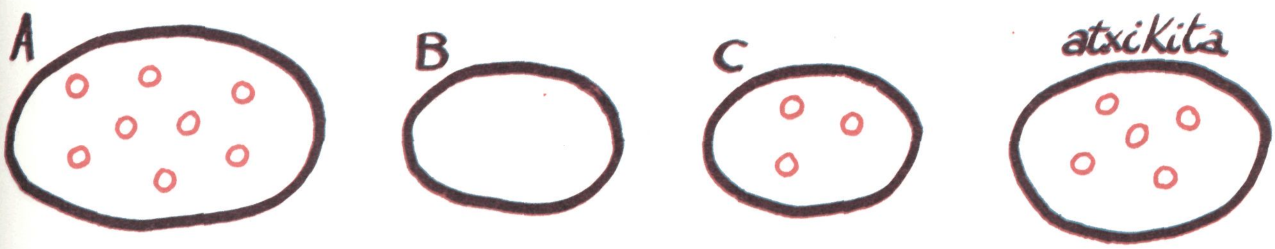


edo

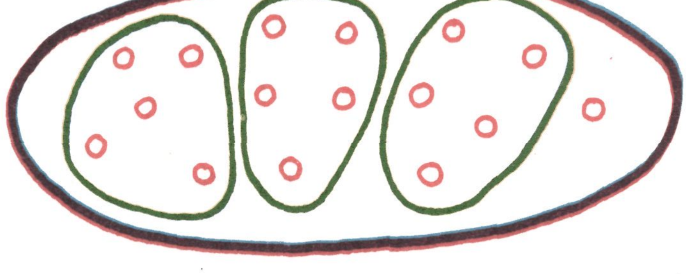


beraz: 5 hogerleko + 4 pezeta soil eta berez.

Lau pezeta horiek aparte utzi, eta HOGERLEKOAK taxutzen eta biltzen hasiko zinake:

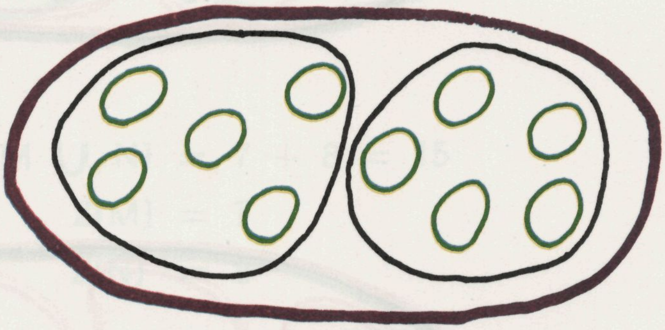


AUBUCUR



Hogerleko **bat** soilik utziko (gorri irudietan), eta (25 pta)ko **hiru** (berde irudietan) izango zenituzke zenbaketari jarraitzeko.

$A \cup B \cup C \cup R$



Beraz, hau zenuke:

5//

2	0	1	4

eta **D** = **2014** (5//)

8.4. — Hots, horixe da BAKETAREN jarraipidea Matematiketan.

Egizkitzu gurekin ondoko baketak. (8.4) honetan zenbaki guztiak BOST oinarritzat harturik idatziko ditugu.

A	1	3	3
B	2	0	4
C	4	1	2
D	2	3	0

1/ Lehendabizi BANAKOEN baketa eginen dugu:

3 + 4 + 2 + 0 = bederatzi = hogerleko BAT + LAU libera berez. **4** idatziko dugu hortaz, hogerleko BAT bildua dugula ahantzi gabe.

2/ Segidan hau izango dugu:

3 + 0 + 1 + 3 (+ 1) = zortzi = (25)ko bat + 3 hogerleko berez. **3** idatziko dugu, eta **1** atxikiko.

1 + 2 + 4 + 2 (+ 1) = hamar = (125) ko **bi** + zero **0** idatziko dugu, eta hau dugu:

5//

		1	3	3
		2	0	4
		4	1	2
+		2	3	0
	2	0	3	4

Era berean, eta zerorrek frogatuko duzunez:

$$5// \quad \begin{array}{r} 3\,2\,0\,4 \\ +\;1\,2\,4\,0 \\ \hline 4\,4\,4\,4 \end{array} \qquad 5// \quad \begin{array}{r} 3\,0\,4 \\ 4\,1\,1 \\ 2\,1\,3 \\ +\;3\,4\,4 \\ \hline 2\,3\,3\,2 \end{array}$$

$$5// \quad \begin{array}{r} 2\,3\,0\,2 \\ 1\,3\,3\,1 \\ +\;2\,4\,0\,4 \\ \hline 1\,2\,0\,4\,2 \end{array} \qquad 5// \quad \begin{array}{r} 1\,0\,2\,0\,2 \\ 2\,1\,1\,0\,3 \\ +\;4\,4\,0\,4\,3 \\ \hline 1\,3\,0\,4\,0\,3 \end{array}$$

Egizkitzu zuk orain beste hauek, beti BOST oinarrian:

$$5// \quad \begin{array}{r} 2\,3\,0 \\ +\;3\,0\,2 \\ \hline \end{array} \qquad 5// \quad \begin{array}{r} 3\,3\,3 \\ +\;4\,2\,4 \\ \hline \end{array} \qquad 5// \quad \begin{array}{r} 3\,0\,1\,1 \\ 4\,3\,2\,1 \\ 3\,4\,2\,2 \\ +\;4\,4\,0\,4 \\ \hline \end{array}$$

8.5. — Egin ditzagun orain beste baketa batzuk, zenbakiak oraingo honetan BI oinarrian emanez:

2//

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline 1 \end{array}$$

$1+0=1$

<u>1</u> idatz

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline 01 \end{array}$$

$1+1=10$

<u>0</u> idatz, <u>1</u> atxik

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline 101 \end{array}$$

$0+0=0+1=1$

<u>1</u> idatz

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$0+1=1$

<u>1</u> idatz

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ \ 1011 \\ \hline 11101 \end{array}$$

$1+0=1$

<u>1</u> idatz.

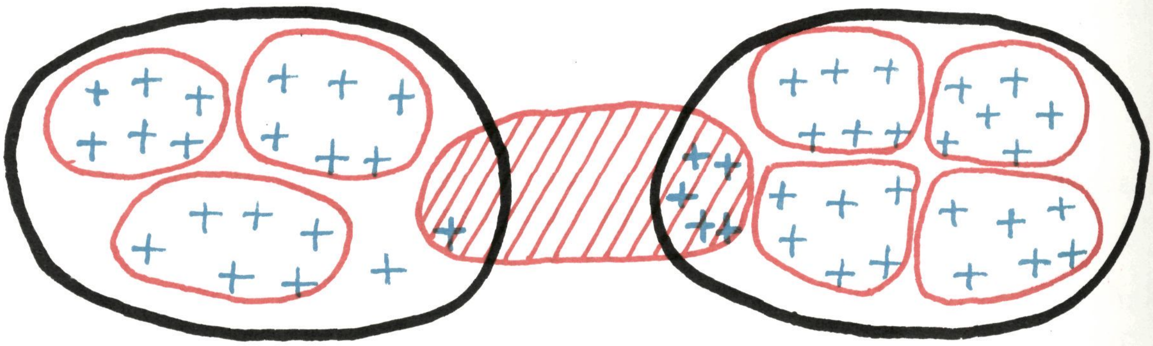
Era berean beste hauek:

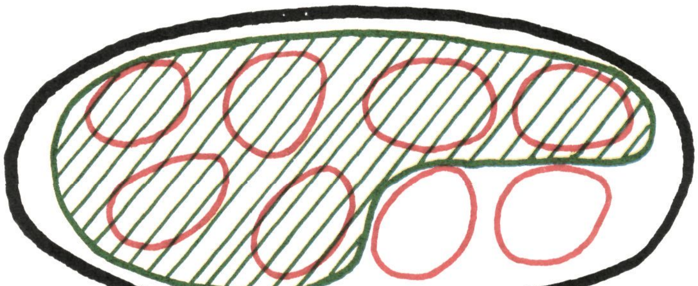
$$\begin{array}{r} 100100 \\ +\ 110101 \\ \hline 1011001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101011 \\ +\ 110110 \\ \hline 1100001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10001 \\ +\ 11011 \\ \hline 101100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ +\quad 10 \\ \hline 1110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ 1010 \\ +\quad 111 \\ \hline 11010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ 1101 \\ 1110 \\ 1011 \\ +\ 1001 \\ \hline 111000 \end{array}$$

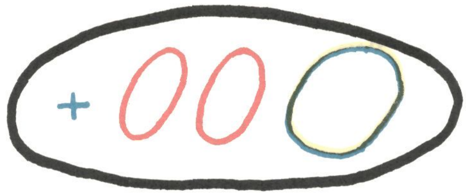
8.6. — Eta orain beste baketa batzuk egingo ditugu SEI oinarrian:

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 45 \\ \hline 121 \end{array}$$





beraz:



	O	O	+
	1	2	1

OHARRA: Eskuarki egiten den baketa, hortaz, HAMAR oinarrikoa da; eta ez du desberdintasunik batere, ikusi duzunez, beste oinarritan egin daitezkeenekin.

8.7. — Molda ditzagun orain **baketa-taulak.** Lagungarri izango zaizkizu baketak eta kenketak burutzeko:

2//

+	0	1
0	0	1
1	1	10

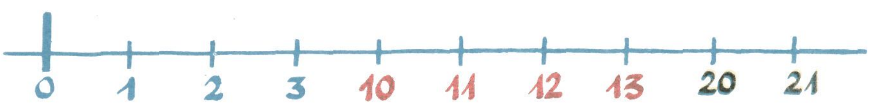
4//

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Presta zazu zerorrek orain ZAZPI oinarrikoa.

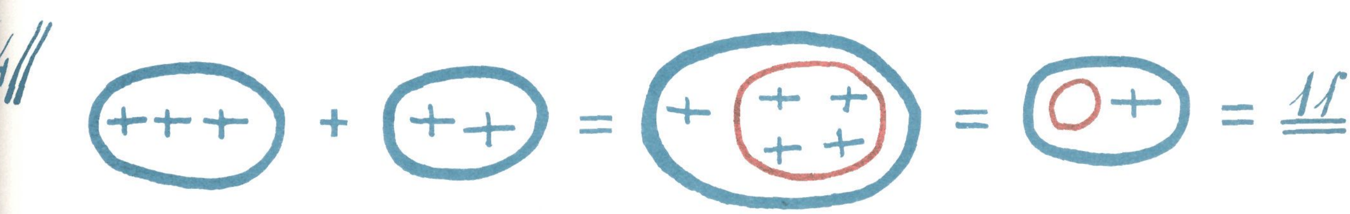
8.8. — Marrazki bidez ere egin daitezke baketak edozein oinarritan:



Erregelatxo horrek, zerorrek ikus dezakezunez, LAU du oinarritzat; eta **0, 1, 2** eta **3** lumeroak erabiltzen ditu.

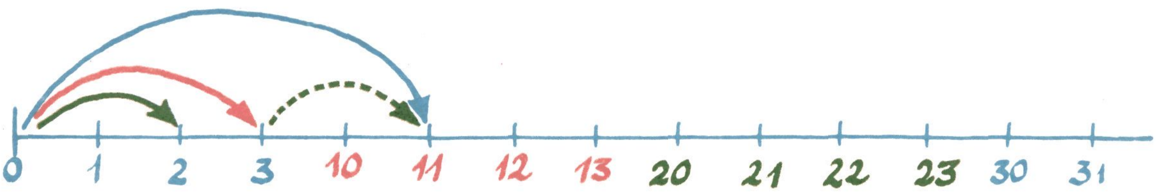
LAUA oinarri, zenbat da 3 + 2? Alegia, NOLA IDAZTEN DA? Aski duzu ongi aztertzea, edo-ta aurreko taulan begiratzea, eta hau dukezu:

$$3 + 2 = 11$$



EUSKALTZAINDIA
AZKUE BIBLIOTEKA

Eta erregela baliatuz:



Presta zazu zerorrek horrelako erregelatxo bat (LAUA oinarri), eta erabil zazu ondoko baketak egiteko:

4//

3 + 3 =

2 + 1 =

3 + 1 =

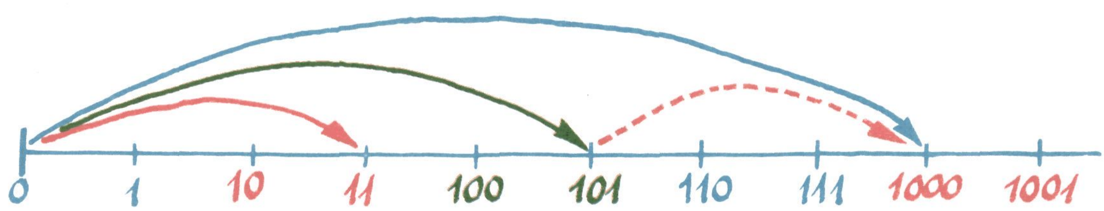
1 + 3 =

2 + 3 + 1 =

3 + 3 + 2 =

3 + 2 + 3 + 1 =

8.9. — Hona hemen, bukatzeko, BI oinarrizko erregelatxo bat. (8.5) puntuko baketak azter itzazu berriro, baina oraingoan erregelatxo hau baliatuz:



Esate baterako: 11 + 101 = 1000. Egia dea hau? Zergatik? Zenbat dira ondoko hauek?

2//

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ +\ 1\,0\,0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,0 \\ +\ 1\,0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,1\,0 \\ +\ 1\,1\,1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ +\ 1\,0\,1\,1 \\ \hline \end{array}$$

9 — K E N K E T A

9.1. — Eman dezagun zazpi libera dituzula poltsikuan, eta lau eman behar dituzula. Zenbat geldituko zaizu? Horra hor kenketa bat:

zazpi ken lau (= hiru)

Hots, geure matematikazko idazkeraz, hauek dira darabilzkigun ikurrak:

zazpi	=	' 7 '
ken	=	'—'
lau	=	' 4 '
berdin	=	'='
hiru	=	' 3 '

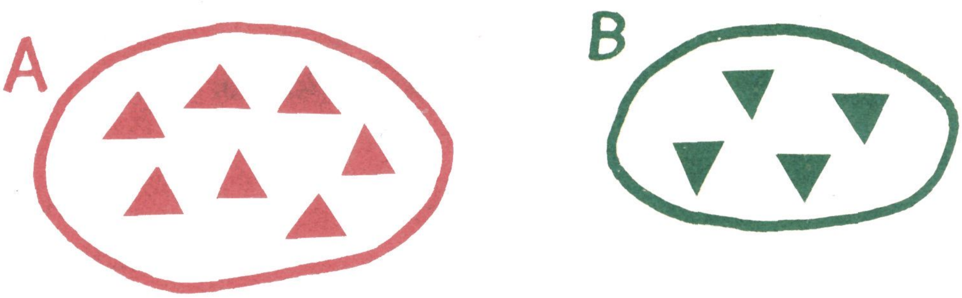
eta, hortaz, **7 — 4 = 3**

Era berean:

3 — 2 = 1
4 — 1 = 3
8 — 4 = 4
9 — 5 = 4

Matematika-egiketa horri KENKETA deritza.

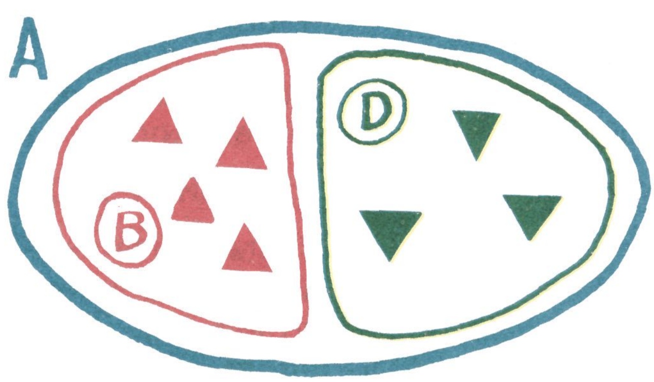
9.2. — Eman ditzagun A eta B multzoak:



Z(A) = 7 Z(B) = 4

Z(A) — Z(B) = 7 — 4 = 3

Edo, beste era batera ikusiz:



baita

$$Z(A) - Z(B) = Z(D)$$
$$Z(A) - Z(D) = Z(B)$$

Z(B) eta Z(D), beraz, elkarren osatzaile dira Z(A)-ri buruz.

Horrez gainera, beste berdintza hauek ditugu:

$$Z(B) + Z(D) = Z(A)$$
$$Z(D) + Z(B) = Z(A)$$

Lau berdintza horiek daude EDOZEIN baketa-kenketatan. Esate baterako:

$$\left[\begin{array}{l} 8 - 5 = 3 \\ 8 - 3 = 5 \\ 5 + 3 = 8 \\ 3 + 5 = 8 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 6 - 2 = 4 \\ 6 - 4 = 2 \\ 4 + 2 = 6 \\ 2 + 4 = 6 \end{array}\right.$$

Osa itzazu zerorrek ondokoak:

$$\left[\begin{array}{r} 9 - 2 = \\ = \\ = \\ = \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{r} 3 - 2 = \\ = \\ = \\ = \end{array}\right.$$

Baketa eta kenketa, beraz, eragiketa aurkariak dira.

Ohar bat horri buruz:

$$\left[\begin{array}{l} 4 - 0 = 4 \\ 4 - 4 = 0 \\ 0 + 4 = 4 \\ 4 + 0 = 4 \end{array}\right.$$

Eta beti:

$$\mathbf{Z(A) - 0 = Z(A)}$$

9.3. — Orain arteko etsenpluetan kopuru edo keta txikiak erabili ditugu: 8, 5, 7 ... Nola egin kenketak, ordea, kopuru handietan?

Kenketa hauen kakoa ZENBAKUNTZAREN TEORIAN datza.

Eman dezagun zinemara zoazela, eta txartelak 17 pezeta balio duela. 3 hogerleko eman behar dituzu, hortaz, eta 2 pezeta. Poltsikuan miatu, eta hau aurkitu duzu: 5 hogerleko eta 3 pezeta. Ordaindu ondoren, horrela, 2 hogerleko eta pezeta 1 gelditu zaizu. Hortaz:

	hogerleko	pezeta
	5	3
−	3	2
	2	1

Sobera konturatu gabe, horrela, kenketa bat egin duzu BOST oinarrian.

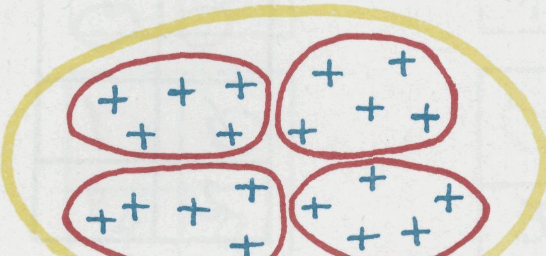
9.4. — Gauzak berehala zail daitezke, ordea.

Eman dezagun poltsikuan LAU hogerleko baizik ez daukazula. Zenbat bihurtuko dizu txartel-saltzaileak?

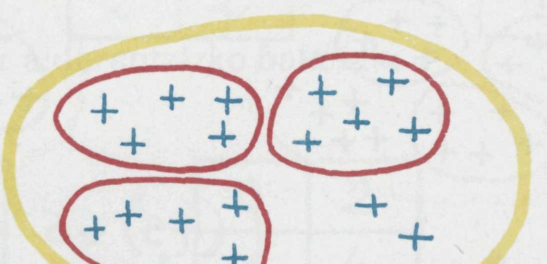
	hogerleko	pezeta
	4	0
−	3	2

Dagoeneko badakikezu: 3 pezeta bihurtu behar dizu. Zergatik, ordea? Azter dezagun:

poltsikuan daukazuna



ordaindu beharra



Kenketak, beraz, 3 ematen du:

	hogerleko	pezeta
	4	0
−	3	2
	0	3

Era berean:

	4	1
−	2	4

Has zaitezen banakoetatik:

4	1
2	4

1 Ken 4, ezin.

$$1\ (+5) = 6$$
$$\begin{array}{r} 6 \\ -4 \\ \hline 2 \end{array}$$

Eta orain bostekoetara (= hogerlekoetara, kasu honetan)

4	
2+1	

4-3=1

Banakoen kenketa egitean 5 pezeta **erantsi** baititut gainean, orain beste bost pezeta (= hogerleko bat, bosteko bat) erantsi behar ditut beherean. Eta hortaz: 4 — 3 = 1

O	O
4	1
2	4
1	2

Marrazki bidez, jakina, gauza bera lortzen da.
Egizkitzu orain gurekin beste kenketa hauek:

	O	O
	4	2
—	1	3
	2	4

	O	O
	2	1
—	1	4
	0	2

	O	O
	4	1
—	2	2
	1	4

	O	O
	3	3
—	2	4
	0	4

	O	O
	4	0
—	1	3
	2	2

	O	O
	3	2
—	1	4
	1	3

eta, egiztatzeko, egizkitzu alderantzizko baketak:

	2	4
+	1	3
	4	2

	0	2
+	1	4
	2	1

eta abar.

9.5.— Eman dezagun orain poltsikuan hau daukazula:

25 pts	5 pts	1 pta.
3	4	2

eta hau ordaindu behar duzula (59 pezeta):

25 pts	5 pts	1 pta
2	1	4

1) 2 — 4, ezina; beraz: (2 + 5) — 4 = 7 — 4 = 3.
   Eta 1 atxiki behar, beraz.

2) 4 — (1 + 1) = 4 — 2 = 2

3) 3 — 2 = 1

	3	4	2
—	2	1	4
	1	2	3

Eta egizu alderantzizko baketa:

	1	2	3
+	2	1	4

Eta era berean:

	○	○	○
	4	2	0
−	1	3	2
	2	3	3

	○	○	○
	3	0	1
−	1	4	4
	1	0	2

	○	○	○
	2	2	2
−	1	0	4
	1	1	3

	○	○	○
	4	0	0
−	2	3	4
	1	1	1

Egizkitzu orain zerorrek ondoko hauek:

	○	○	○
	2	1	1
−	1	0	4

	○	○	○
	3	0	2
−	2	4	3

	○	○	○
	1	4	4
−	1	0	3

	○	○	○
	2	0	2
−	1	4	4

9.6. — Era berean egiten dira kenketak edozein oinarritan:

3//

	2	2	0	1
—	1	1	0	2
	1	0	2	2

4//

	3	0	2	3
—	1	1	3	3
	1	2	3	0

9.7. — Eskuarki, halere, HAMARREKO oinarrian egiten dira kenketak, eguneroko zenbakuntza HAMARREKOA baita. (Izan zazu begien aurrean hamarreko taula, aurreko ikaskaian emana).

Hamar//

	O ehuneko	O hamarreko	O bateko
	3	0	2
—	1	5	6
	1	4	6

1) 2 — 6, ezin; (2 + 10) — 6 = 12 — 6 = **6.** 1 atxik.

2) 0 — (5 + 1) = 0 — 6, ezin; (0 + 10) — 6 = **4.** 1 atxik.

3) 3 — (1 + 1) = 3 — 2 = **1.**

Egizu orain beste hau:

	milako	ehuneko	hamarreko	bateko
	3	6	0	8
−	2	1	5	5
	1	4	5	3

1) 8 — 5 = **3.**
2) 0 — 5, ezin; (0 + 10) — 5 = **5.** 1 atxik.
3) 6 — (1 + 1) = 6 — 2 = **4.**
4) 3 — 2 = **1.**

Eta, noski:

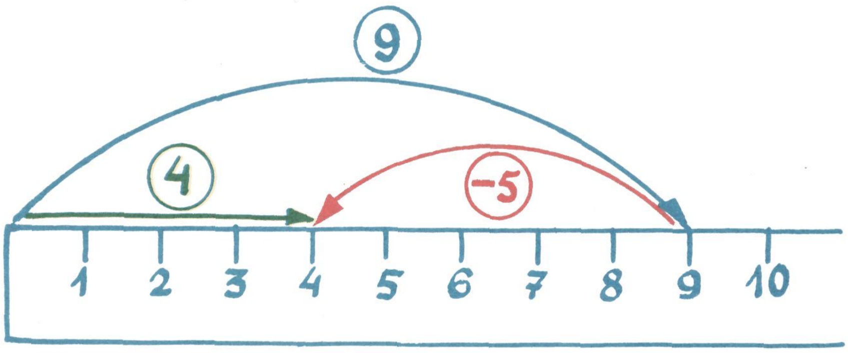
$$\begin{array}{r} 1\,4\,5\,3 \\ +\ 2\,1\,5\,5 \\ \hline 3\,6\,0\,8 \end{array}$$

Egizkitzu beste hauek:

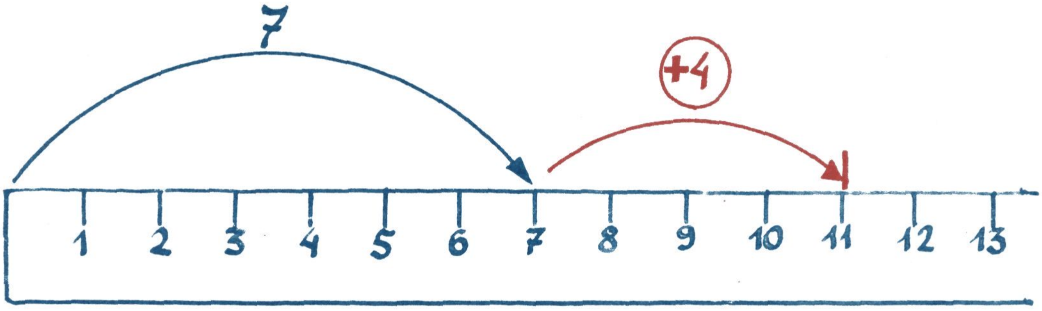
$$\begin{array}{r} 2\,4\,0\,7 \\ -\ 1\,5\,5\,8 \\ \hline 8\,4\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,0\,3\,3 \\ -\ 1\,5\,0\,6 \\ \hline 1\,5\,2\,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\,0\,0\,1\,6 \\ -\ 1\,4\,3\,1\,7 \\ \hline 5\,6\,9\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\,0\,9\,9\,5 \\ -\ 1\,6\,3\,8\,8 \\ \hline 1\,4\,6\,0\,7 \end{array}$$

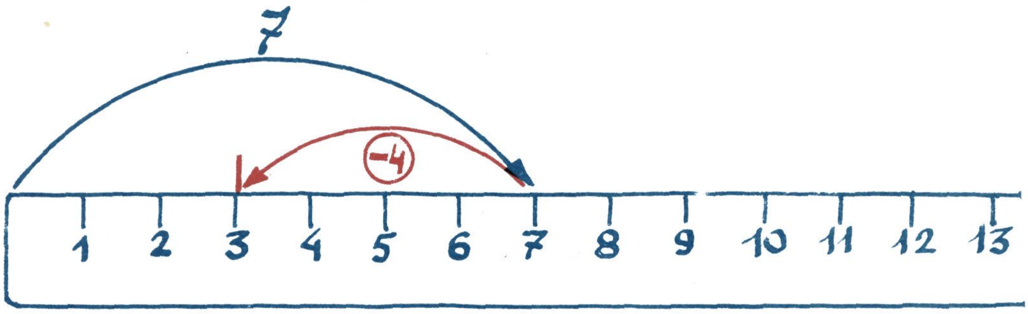
9.8. — Erregelatxoak baliatuz ere egin daitezke kenketak:



$$\left[\begin{array}{l} 9-5=4 \\ 4+5=9 \end{array}\right.$$



$7+4=11$



$7-4=3$

10 — BIDERKETA

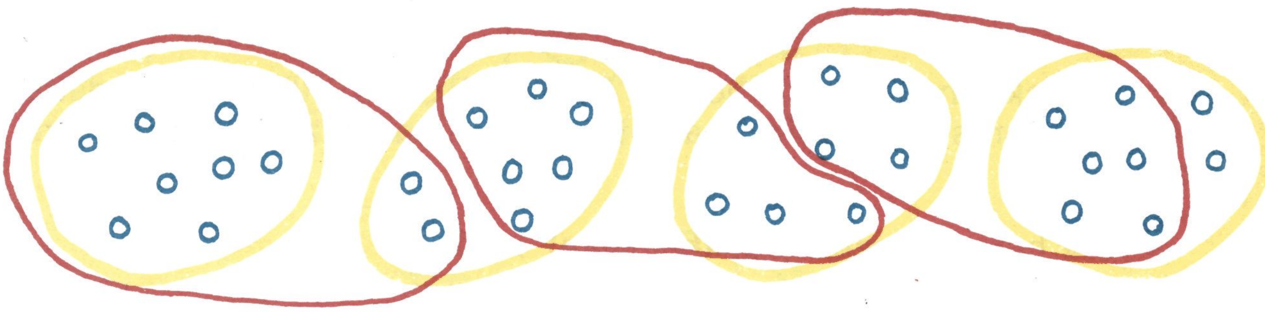
Aurreko ikastaroetan ikasi dugu biderketa zer den, eta pratikan bi zenbakiren biderketa nola egiten den.

Aurten osatu egingo ditugu funtsezko ideia horiek.

10.1.— Eman dezagun **(lau)** × **(zortzi)** biderketa. Dakizun bezala honela idatz daiteke:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$$
$$8 + 8 + 8 + 8$$

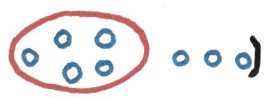
Eta biderketaren emaitza, zenbakuntz-oinarriaren arabera izkiriatuko dugu. Eman dezagun HAMAR dela oinarria (alegia, oinarri eskuarrean ari garela); eta hau izango dugu:

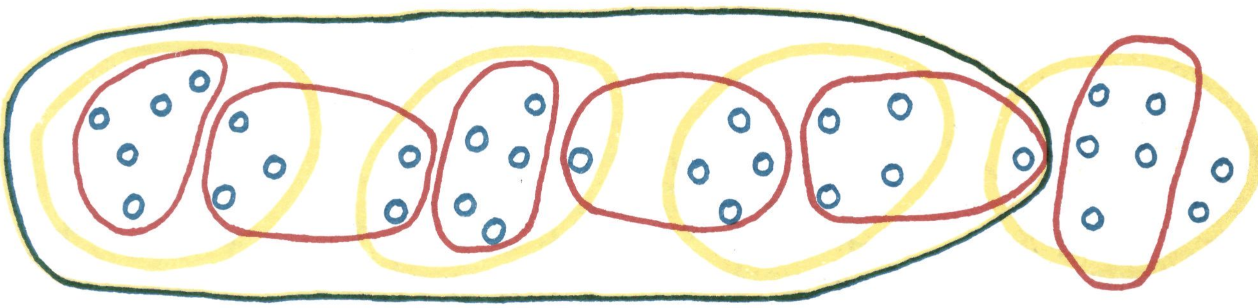


Beraz, **4 × 8 = 32** (hamar //)

Baina beste edozein oinarritan egin liteke. Har dezagun BOST oinarritzat; eta hau dugu:

lau = '4'

zortzi = '13' (ikus zergatik: )



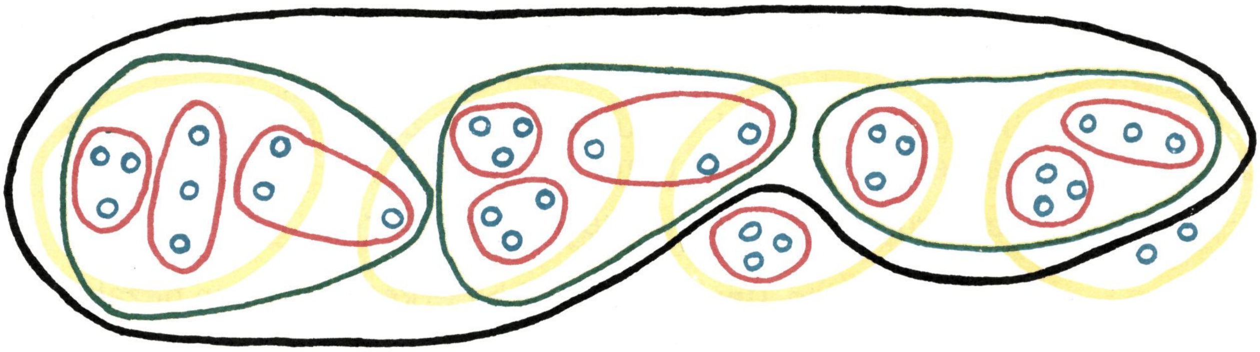
$4_{5)} \times 13_{5)} =$

1	1	2

Eta oinarritzat HIRU hartuz gero:

$4_{3)} = 11$

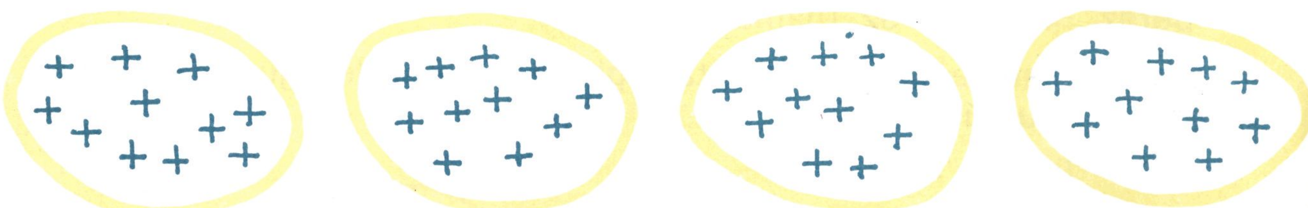
$8_{3)} = 22$



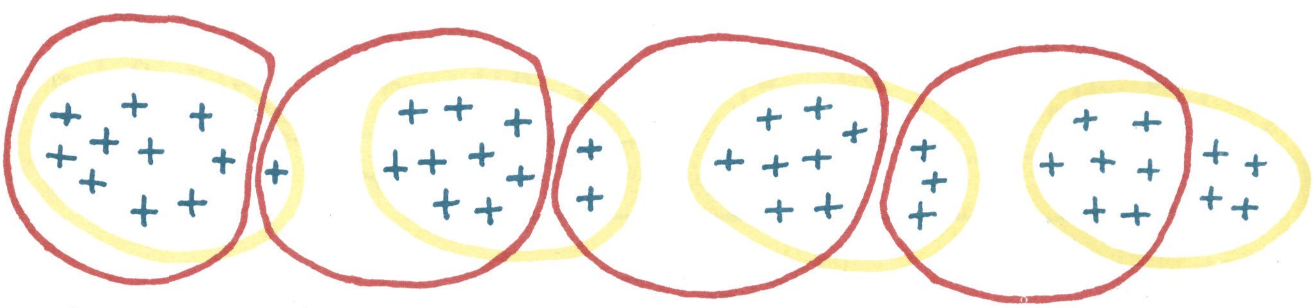
○	○	○	○
1	0	1	2

Bi zenbakiren biderketa, hortaz, EDOZEIN OINARRITAN egin daiteke. Aski da, funtsean, emaitza hautatutako zenbakuntz-oinarriaren arabera taxutzea.

— Era berean beste hau: **(hamaika)** × **(lau)**

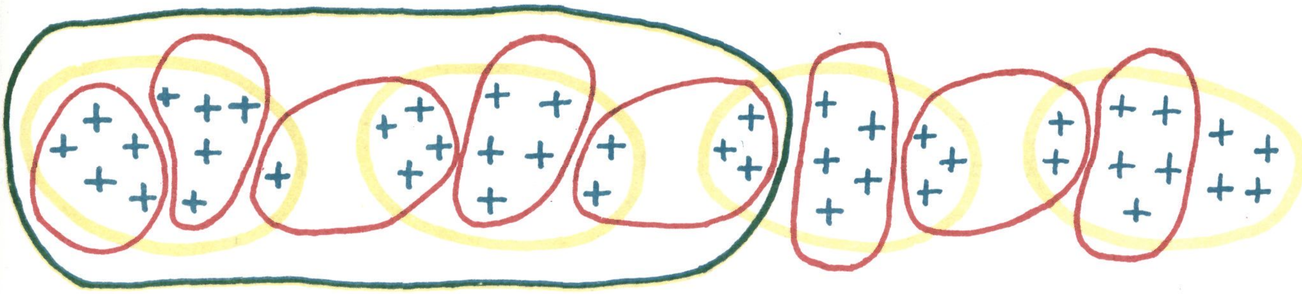


Oinarritzat HAMAR hartzen badugu



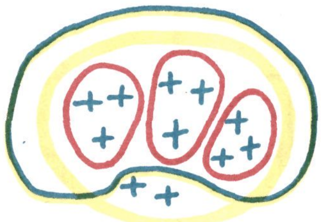
○	○
4	4

Oraingoan, berriz, BOSTA oinarritzat hartuz gero:

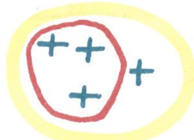


○	○	○
1	3	4

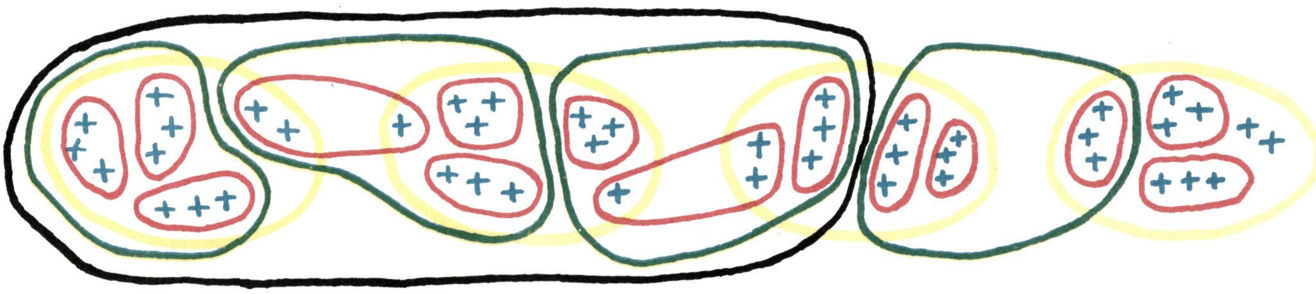
Eta oinarritzat HIRU hartuz:



○	○	○
1	0	2



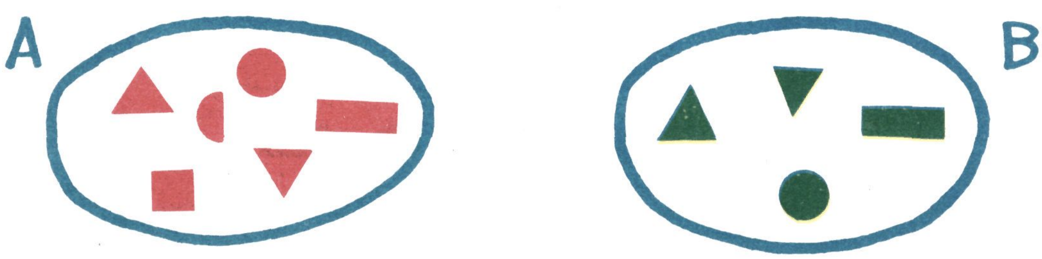
○	○
1	1



○	○	○	○
1	1	2	2

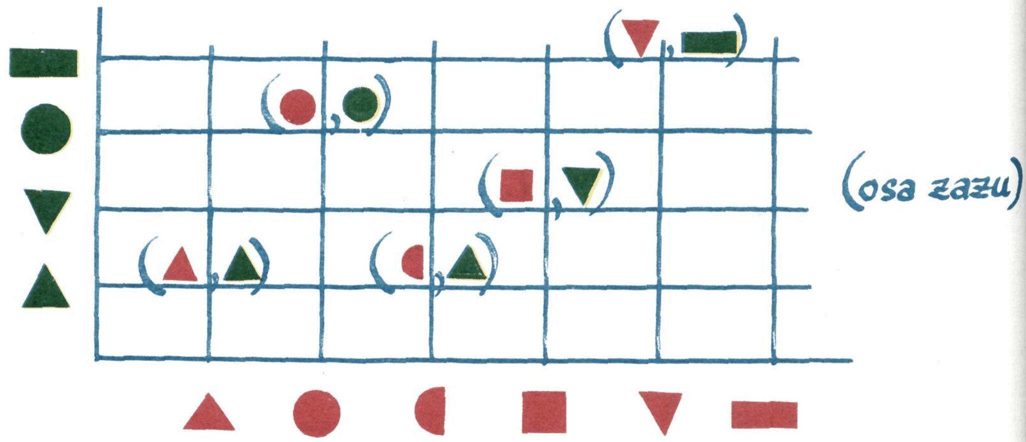
10.2. — Aldera ditzagun orain zenbakien biderketa eta multzoen cartestar elkarketa.

Eman ditzagun A eta B multzoak:



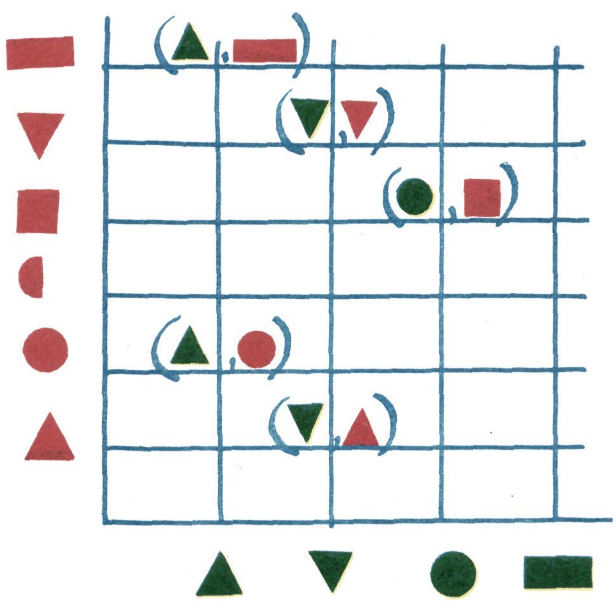
Eta, cartestar ardatzak baliatuz, adieraz ditzagun (A × B) osatzen duten bikoteak:

A×B



Egin dezagun orain (B × A) cartestar elkarketa:

B×A



Aurten ikasia zenuenez:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Cartestar elkarketan, beraz, BIDERKARIEN SEGIDA ANTSI DA, eta **A × B eta B × A** elkarketak DESBERDINAK dira: elementu BAKOITZEAN duzu desberdintasuna. Multzoen elkarketa EZ DA TRUKAGARRIA.

Gogoan har ditzagun orain Z(A) eta Z(B); bi multzoon ZENBAKIAK, alegia:

$Z(A) =$ sei
$Z(B) =$ lau
$Z\ (A \times B) =$ hogei-ta-lau

Beraz:

$$Z\ (A \times B) = Z(A) \times Z(B)$$

Hots, $Z(B) \times Z(A) =$ hogei-ta-lau

eta

$$Z\ (B \times A) = Z(B) \times Z(A)$$

Hitz batez:

$$\mathbf{Z\ (A \times B) = Z\ (B \times A)}$$

Alegia, ZENBAKIEN MAILAN, BIDERKARIEN ILARA EDO SEGIDA EZ DA ANTSI. Bestela esateko, ZENBAKIEN BIDERKETA TRUKAGARRIA da.

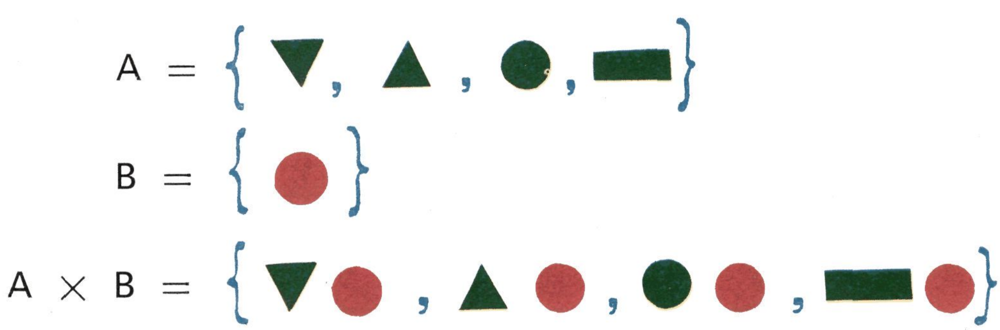
10.3. — Dakigun bezala:

$$A \times \varnothing = \varnothing$$

Alegia, biderkarietako bat MULTZO HUTSA baldin bada, biderketa-bikoterik egiterik ez dago, eta emaitza multzo hutsa bera da. Hortaz,

$$\begin{aligned} Z(A) \times 0 &= 0 \\ 4 \times 0 &= 0 \\ 7 \times 0 &= 0 \\ 1647 \times 0 &= 0 \end{aligned}$$

10.4. — Egin dezagun orain A eta B multzoen cartestar elkarketa:



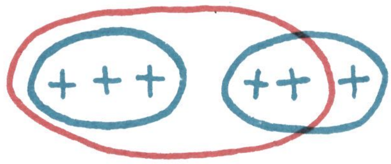
Eta multzoon zenbakiak hartuz:

$$Z\ (A) = 4$$
$$Z\ (B) = 1$$
$$Z\ (A \times B) = 4$$
$$Z\ (A \times B) = Z(A)$$

Biderketaren ELEMENTU MOTELA **1** DA, baketarena **O** den bezala.

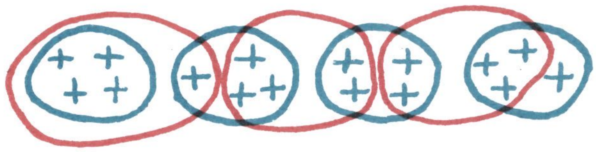
10.5. — Molda dezagun orain biderketaren taula bat. Hauta dezagun **5** oinarria, eta hau dugu:

3 × 2



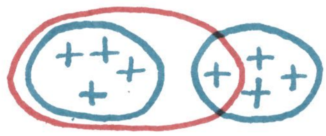
1	1

4 × 4



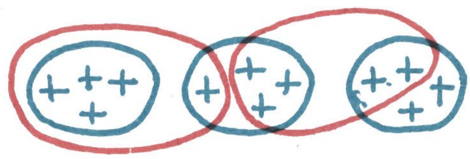
3	1

4 × 2



1	3

4 × 3



2	2

eta hau izango dugu:

⊗	0	1	2	3	4
0	(0,0) 0	(1,0) 0	(2,0) 0	(3,0) 0	(4,0) 0
1	(0,1) 0	(1,1) 1	(2,1) 2	(3,1) 3	(4,1) 4
2	(0,2) 0	(1,2) 2	(2,2) 4	(3,2) 11	(4,2) 13
3	(0,3) 0	(1,3) 3	(2,3) 11	(3,3) 14	(4,3) 22
4	(0,4) 0	(1,4) 4	(2,4) 13	(3,4) 22	(4,4) 31

Bost//

Eta taula hori baliatuz edozein biderketa egin daiteke:

bost//

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 34 \\ \hline 202 \\ 124 \\ \hline 1442 \end{array}$$

4×3=22; 2 idatz, 2 atxik
4×2=13; +2=20; 0 idatz, 2 idatz

3×3=14; 4 idatz, 1 atxik
3×2=11; +1=12; 2 idatz, 1 idatz

Egizkitzu zerorrek, taula baliatuz, ondoko hauek:

5//

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times\ 23 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array}$$

10.6. — Eskuarki, halere, HAMARREKO oinarrian izkiriatzen ditugu zenbakiak, eta HAMARREKOAN egiten matematikazko eragiketak:

$$\begin{array}{r} 326 \\ \times\ 24 \\ \hline 1304 \\ 652 \\ \hline 7824 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 309 \\ \times\ 16 \\ \hline 1854 \\ 309 \\ \hline 4944 \end{array}$$

Osa itzazu zuk hauek:

$$\begin{array}{r} 1403 \\ \times\ 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3247 \\ \times\ 47 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1196 \\ \times\ 24 \\ \hline \end{array}$$

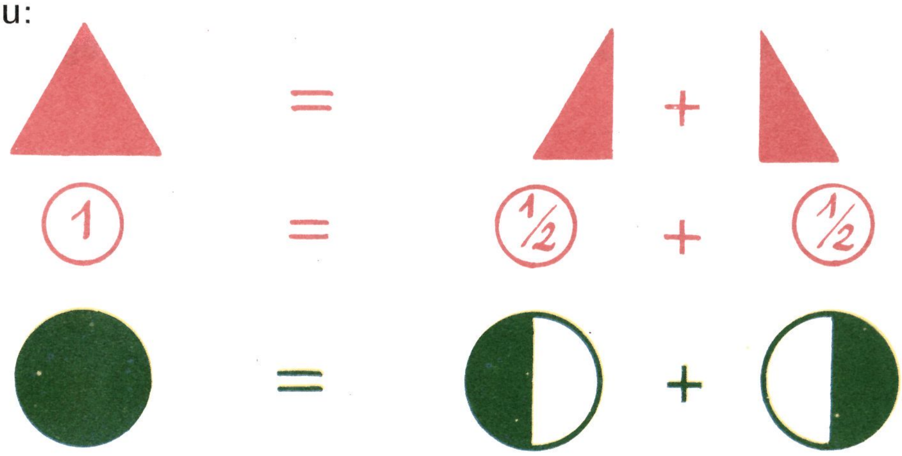
$$\begin{array}{r} 3002 \\ \times\ 76 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4017 \\ \times\ 19 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3517 \\ \times\ 78 \\ \hline \end{array}$$

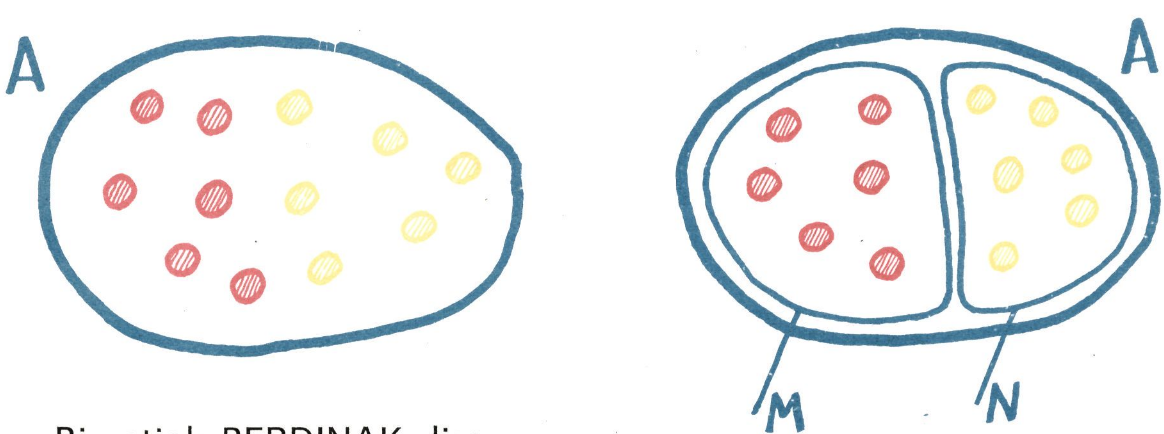
11 — ZATIKETA

11.1. — Iaz ikasi zenuenez, erraza da ERDIAREN ideia ulertzea:

Sagar hori bi zati berdinetan zatitzean, bi ERDI izan ditugu.

Egiketa hori edozein gauzatan burutzen duzularik, ZATIKETA bat egin duzu:





Bi zatiok BERDINAK dira:

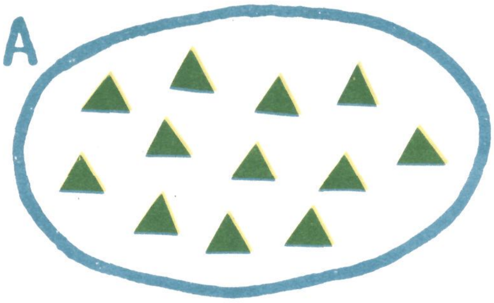
$$Z(M) = Z(N) \quad (=6)$$

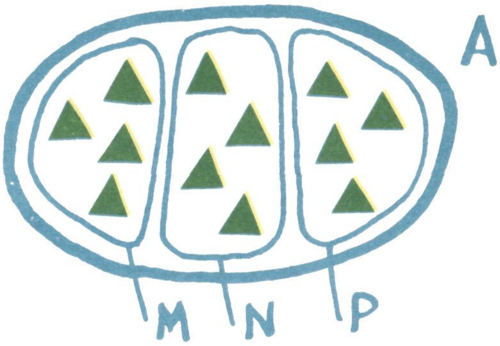
eta bien baketa Z(A) da:

$$Z(M) + Z(N) = Z(A) \quad (=12)$$

Horrixe deritza **2**-ko zatiketa.

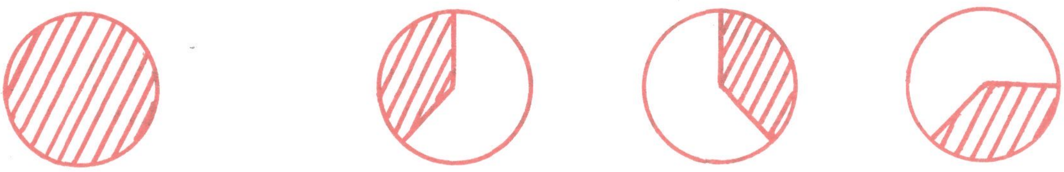
11.2. — Bi zatitan egin beharrean, **3**-tan zati daiteke:





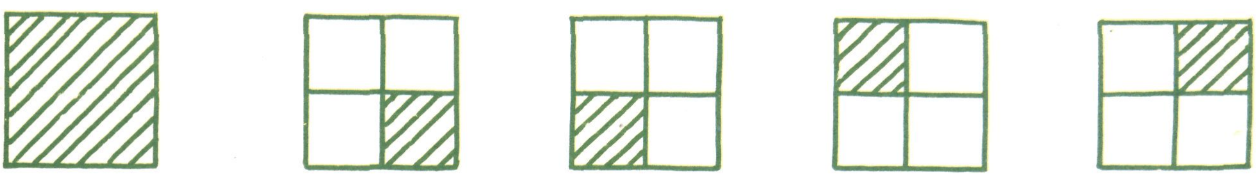
eta: $Z(M) = Z(N) = Z(P)$ $(=4)$

$Z(M) + Z(N) + Z(P) = Z(A)$ $(=12)$



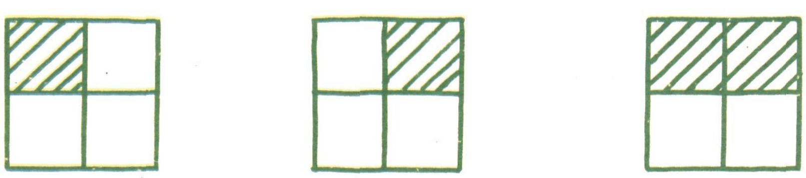
$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

11.3. — Era berean, 4, 5, 6, ... zatitan:

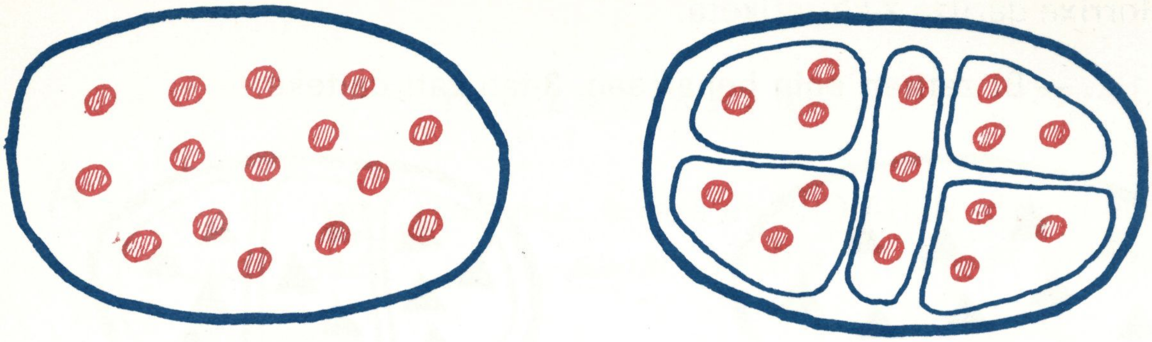


$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

baita =



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$



$$\left[\begin{array}{l} 12 = 5 \times 3 \\ 12 : 3 = 5 \end{array}\right.$$

eta abar.

Matematika-eragiketa horri ZATIKETA deritza.

11.4.—(11.2) puntuan ikusi dugunez:

12 : 3 = 4 (irakur: «hamabi **zati** hiru, berdin lau»)

eta alderantziz beste bi hauek:

3 × 4 = 12 («hiru **bider** lau, berdin hamabi»)
4 × 3 = 12 («lau **bider** hiru, berdin hamabi»)

Baina 12 : 4 = 3

Beraz: $12 : 3 \neq 12 : 4$

Esate baterako:

18 : 6 = 3, eta hortaz $\left[\begin{array}{l} 3 \times 6 = 18 \\ 6 \times 3 = 18 \end{array}\right.$

28 : 7 = 4, eta hortaz $\left[\begin{array}{l} 4 \times 7 = 28 \\ 7 \times 4 = 28 \end{array}\right.$

ZATIKETA ETA BIDERKETA, hortaz, eragiketa AURKARIAK dira; baketa eta kenketa elkarrekiko aurkariak diren bezalatsu.

$$\left[\begin{array}{rcccr} 8 & + & 2 & = & 10 \\ 10 & — & 2 & = & 8 \\ 8 & \times & 2 & = & 16 \\ 16 & : & 2 & = & 8 \end{array}\right.$$

(«zortzi GEHI bi, berdin hamar»)
(«hamar KEN bi, berdin zortzi»)
(«zortzi BIDER bi, berdin hamasei»)
(«hamasei ZATI bi, berdin zortzi»)

Eta lau eragiketen arteko lotkia horiek launaka emanez gero, hauek ditugu:

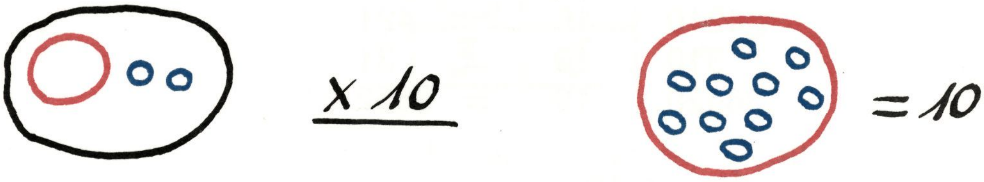
$$\left[\begin{array}{r} 8 + 2 = 10 \\ 2 + 8 = 10 \\ 10 — 2 = 8 \\ 10 — 8 = 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{r} 8 \times 2 = 16 \\ 2 \times 8 = 16 \\ 16 : 2 = 8 \\ 16 : 8 = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 12 + 3 = 15 \\ 3 + 12 = 15 \\ 15 - 3 = 12 \\ 15 - 12 = 3 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 12 \times 3 = 36 \\ 3 \times 12 = 36 \\ 36 : 3 = 12 \\ 36 : 12 = 3 \end{array}\right.$$

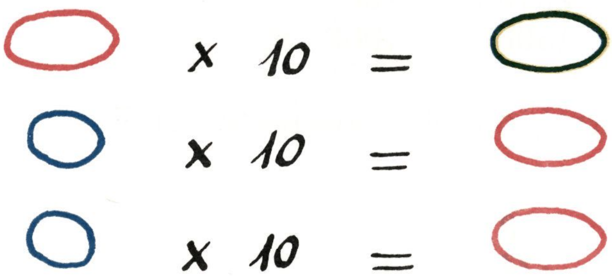
11.5. — Eman dezagun eragiketa hau:

$$12 \times 10$$

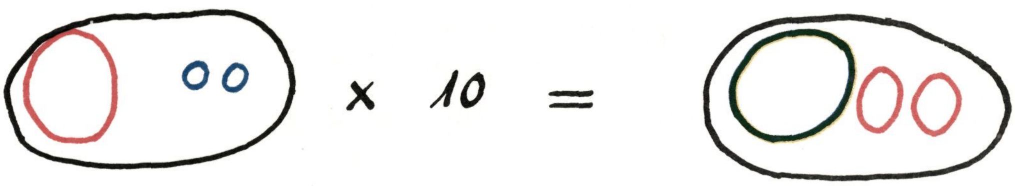
Honela idatz daiteke:



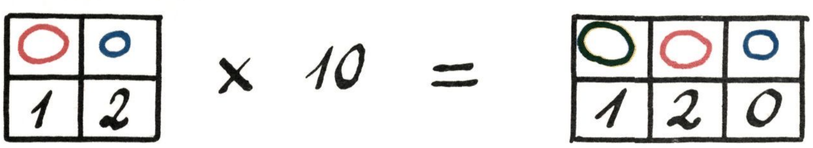
Eta baketaren berezitasunak baliatuz, hau dugu:



Hortaz:



edo-ta



Eta era berean:

$$\begin{array}{rcrcr} 37 & \times & 10 & = & 370 \\ 421 & \times & 10 & = & 4210 \\ 31 & \times & 10 & = & 310 \\ 3652 & \times & 10 & = & 36520 \end{array}$$

Alegia, × **10** ERAGIKETA BURUTZEKO, ASKI DA BIDERKARIARI ESKUIN ALDETIK ZERO BAT ERASTEA.

Eta era berean:

× **100** ... + **00**
× **1000** ... + 000 , eta abar.

$$\begin{array}{rcrcr}
18 & \times & 100 & = & 1800 \\
231 & \times & 100 & = & 23100 \\
15 & \times & 1000 & = & 15000 \\
750 & \times & 100 & = & 75000 \\
6574 & \times & 1000 & = & 6754000 \\
16 & \times & 10000 & = & 160000
\end{array}$$

Alderantziz gauza bera dugu. : **10** ERAGIKETA BURUTZEKO, ASKI DA ZATIKIZUNARI ESKUIN ALDETIK ZERO BAT KENTZEA:

$$\begin{array}{rcrcr}
370 & : & 10 & = & 37 \\
4210 & : & 10 & = & 421 \\
310 & : & 10 & = & 31 \\
36520 & : & 10 & = & 3652
\end{array}$$

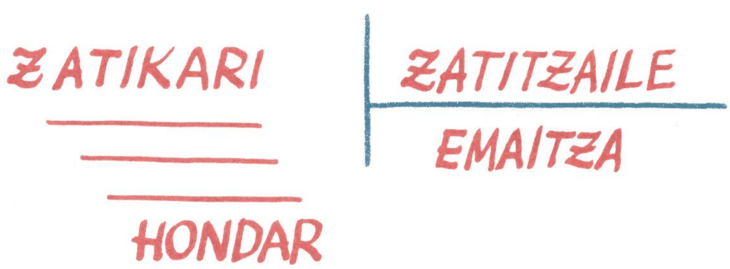
baita, bide beretik:

$$\begin{array}{rcrcr}
1800 & : & 100 & = & 18 \\
23100 & : & 100 & = & 231 \\
15000 & : & 1000 & = & 15
\end{array}$$

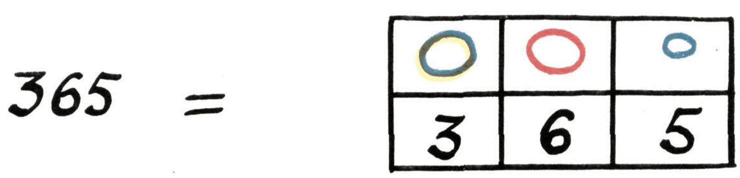
Egizkitzu zerorrek ondoko eragiketa hauek:

$$\begin{array}{rcrc}
365 & \times & 10 & = \\
4321 & \times & 100 & = \\
7749 & \times & 1000 & = \\
330 & : & 10 & = \\
44000 & : & 100 & = \\
320 & : & 1000 & = \\
650000 & : & 100 & =
\end{array}$$

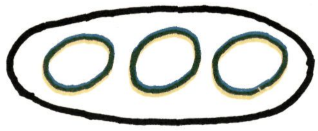
11.6. — Edozein zatiketatan LAU atal ditugu:



Egin dezagun orain 365 : 7 zatiketa, eta urteak zenbat aste duen aurkituko dugu. Nola jokatuko?



a) Lehendabizikorik, eta EZKER aldetik hasita (biderketan, honetan ere eragiketa aurkari, eskuin aldetik hasten gara), hau dugu:



: 7 Ezin.

Beraz, «emaitzean» ez dugu ○ mailakorik izango.

b) Orduan hau egiten dugu:

○	○
3	6

: 7

Eta badakigu 7 × 5 = 35. Beraz, **5** idatziko dugu:

eta hau dugu:

	○	○
	3	6
—	3	5
		1

d) Orain, beraz, badugu:

○	○
1	5

: 7

7 × 2 = 14. Beraz, **2** idatziko dugu:

	○	○
	1	5
—	1	4
		1

Edo, ohitura hartuz gero ia oharkabean egin ohi denez:

365	7
15	52
1	

Zatiketa mota honi OSOA deritza (komarik ez dagoelako); baina ez da zatiketa ZEHATZA, hondartzat **1** gelditu zaigulako.

Urtebetean **52** aste dira, eta egun **bat** berex gelditzen.

11.7. — Era berean, egin itzazu gurekin batera ondoko zatiketa hauek:

3629	8
42	453
29	
5	

36921	11
39	3356
62	
71	
5	

Baita hauek ere:

4749	:	5	=
3620	:	7	=
7079	:	11	=
3652	:	4	=
11096	:	12	=
38429	:	114	=
47650	:	28	=

12 — BERRETURAK eta ZATIKIAK

12.1. — Eman dezagun biderketa berezi hau:

$$4 \times 4 \times 4$$

Alegia, **4**-a bere buruaz bidertzen da; eta hori HIRU aldiz agertuz.

Eta orain beste biderketa hau:

$$6 \times 6 \times 6 \times 6$$

Hemen, **6-a** da bere buruaz LAU aldiz bidertzen dena.

Matematika eragiketa horri, biderketa zenbait aldiz berretzen delako, BERRETURA deritza; eta honela idazten da:

$4 \times 4 \times 4 = 4^3$ (= «lau ber hiru»)
$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$ (= «sei ber lau»)

Era berean ondokoak ere:

$3 \times 3 = 3^2$ (= «hiru ber bi»)
$16 \times 16 \times 16 = 16^3$ (=«hamasei ber hiru»)
$391 \times 391 \times 391 \times 391 \times 391 = 391^5$

Biderkari gisa berretzen den kopurua (4, 6, 3, 16, 391) berreturaren OINARRIA da; eta biderketa zenbat aldiz berretzen den adierazten duen zenbakia (lumero txikiz eta goraxeago izkiriatua) BIDERKIA da:

4^3 = (oinarria) $^{\text{(biderkia)}}$
kaso honetan: oinarria, 4; biderkia, 3.

Ohar bat: **badakizu nola igaro ginen BAKETATIK BIDERKETARA:**

$$\mathbf{3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 5}$$

Era berean orain:

$$\mathbf{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5}$$

12.2. — Idatz itzazu ondoko berreturak, eta marka zazu argi-eta-garbi zein den kaso bakoitzean berreturaren OINARRIA eta BIDERKIA:

$8 \times 8 \times 8 = 8^3$ (oinarria : **8**; biderkia : **3**)

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 =$$
$$6 \times 6 \times 6 =$$
$$32 \times 32 \times 32 =$$
$$21 \times 21 \times 21 \times 21 =$$
$$287 \times 287 =$$

12.3. — Alderantziz orain, bila itzazu ondoko berreturen balioa. Alegia:

$$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 64 \times 8 = 512$$
$$7^3 = 7 \times 7 \times 7 = 49 \times 7 = 343$$
$$14^4 =$$
$$26^2 =$$
$$33^3 =$$
$$426^2 =$$
$$3^5 =$$
$$2^8 =$$

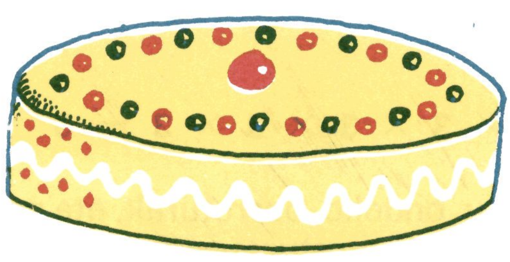
12.4. — Hona hemen, taula gisa aurkezturik, lehenengo hamar zenbakien 2 eta 3 berreturak.

	bitza	hirutza
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125

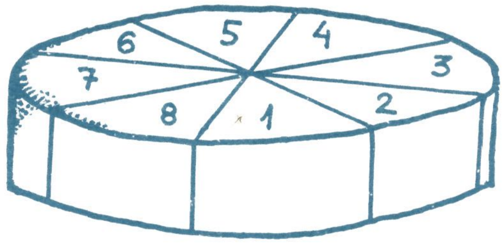
	bitza	hirutza
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1.000

12.5. — Ikus dezagun orain ZATIKIA zer den.

Eman dezagun gozoki hau:

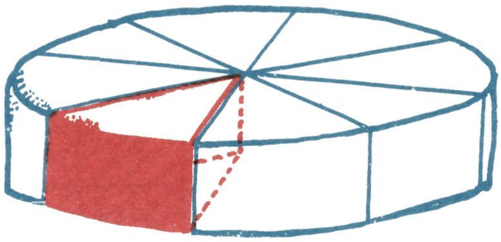


Zortzi lagun etorriko direla-ta, ZORTZI zati berdin egin behar dira:



ZATIKETA bat egin dugu, baina **1** zatituz.

Nola adieraz, hortaz, matematikazko idazkeraz, gozokiaren ZORTZI-RENA dela lortu dugun puska?



Gorriz nabarmen erazi dugun zatia hau da:

$\frac{1}{8}$ («bat zortziren»)

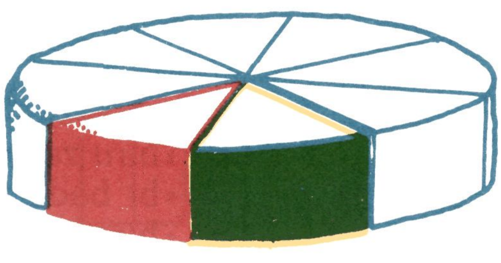
1 = «zatikiaren GOIKOA»
8 = «zatikiaren BEHEKOA»

«Goikoa» zatikizunaren kidea da, eta «behekoa» zatikari baten kidea; baina hemen, zatikian, IZKIRIATURIK GELDITZEN DIRA, eta zatiketa EZ DA BURUTZEN, adierazten baizik.

$\frac{8}{2}$ zatikiak, esate baterako = 8 : 2 = 4

Baina zatiki gisa IZKIRIATURIK geldituko da : $\frac{8}{2}$

Har ditzagun orain bi zati, eta hau genuke:



$\frac{2}{8}$

$\frac{2}{8}$ (= «bi zortziren»)

2 = zatikiaren goikoa
8 = zatikiaren behekoa

$\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$ bi ZATIKI dira. Adierazten den zatiketa ADIERAZKAI GISA GELDITZEN DA, eta ez da burutzen.

Irakur itzazu ondoko zatikiak:

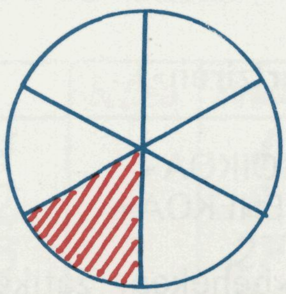
$\frac{3}{7}$ = («hiru zazpiren»)

$\frac{4}{15}$ =

$\frac{2}{3}$ = ("bi heren")

$\frac{7}{9}$ =

12.6. — Eman dezagun orain zirkulu hau:



Zirkuluaren zabalera **6** zatitan zatitu delako, gorriz nabarmen erazi dugun puska hau da:

$\frac{1}{6}$ («bat seiren»)

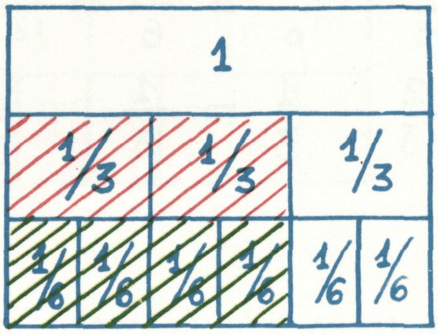
Eta era berean ondokoa:

$\frac{1}{4}$ ("bat lauren")

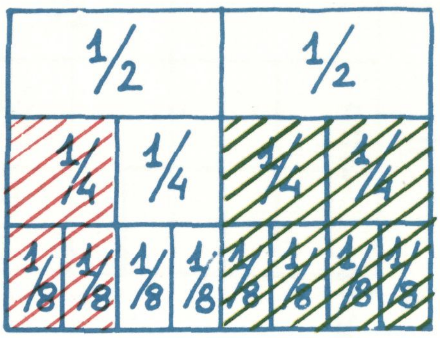
Baita:

$\frac{3}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{10}$ (= «hiru zazpiren»)
(= «bi bederatziren»)
(= «hiru hamarren»)

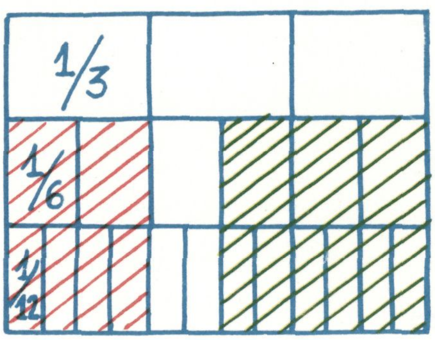
12.7. — Berehala somatu dituzkezu zatikien artean dauden berdintzak:



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

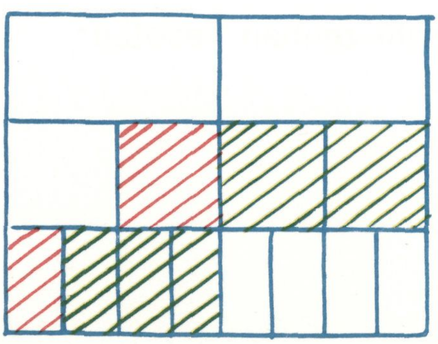


$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

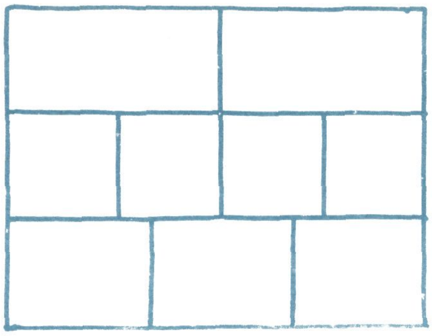


$$\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

12.8. — Zatikiak, bestalde, BATU eta KENDU egin daitezke:



$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

BEHEKO BERBERA duten zatikiak batzeko edo kentzeko, aski da GOIKOEZ arduratzea, BEHEKOAK beren horretan utziaz:

$$\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{6}{9} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{6}{14} - \frac{2}{14} =$$

$$\frac{5}{16} - \frac{3}{16} =$$

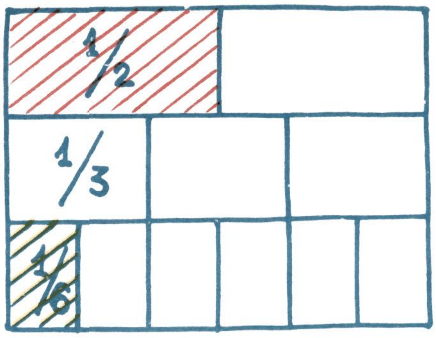
$$\frac{3}{11} - \frac{1}{11} =$$

Beheko DESBERDINAK dituzten baketak eta kenketak burutzea zailago da, eta aurtengo ikastaroan ez ditugu aztertuko.

12.9. — Halaz ere, erraza da eragiketa zenbait kasotan.

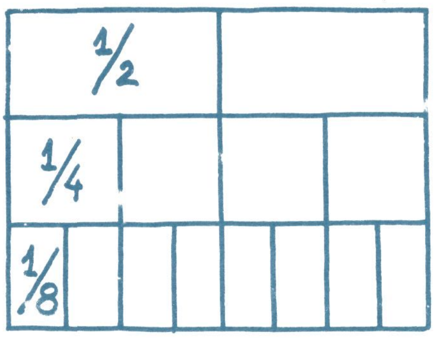
Esate baterako:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$



$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

13. — HAMARKIAK

13.1. —

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Hortxe duzu paper puska bat, eman dezagun, HAMAR zatitan zatitua:
Zati bakoitza, hortaz:
hamarren bat da:

eta, era berean, hamar zatiok paper osoa biltzen dute:

$$10 \times \frac{1}{10} = 1$$

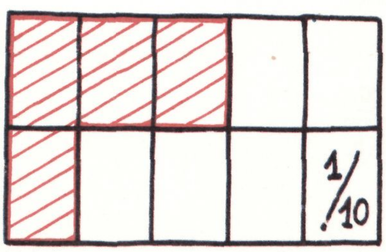
Batzutan astun gertatzen da beti ($\times \frac{1}{10}$) biderkaria alde batera eta bestera garraiatzea; eta horretarako, zatiki horiek arintzeko, beste matematika-idazkera hau asmatu da:

$\frac{1}{10} = 0,1 \longrightarrow$ («zero koma bat»)

Era berean:

$\frac{3}{10} = 0,3 \longrightarrow$ («hiru hamarren, berdin, zero koma hiru»)

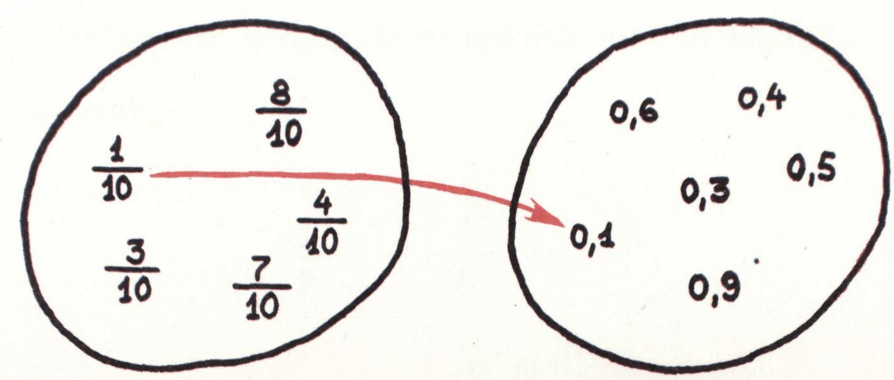
$\frac{7}{10} = 0,7 \longrightarrow$ («zazpi hamarren, berdin, zero koma zazpi»)

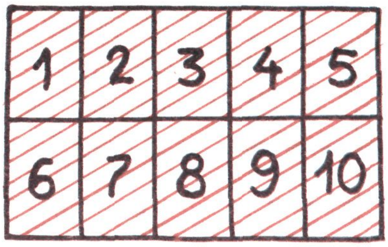


Idatz ezazu hamarkitan zati gorriaren balioa:

$$4 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

Erants itzazu gainerako loturak:





Kaso honetan laukune guztiak daude beterik; hortaz:

$$10 \times \frac{1}{10} = 1{,}0 = \frac{10}{10}$$

edo $10 \times \frac{1}{10} = 1$

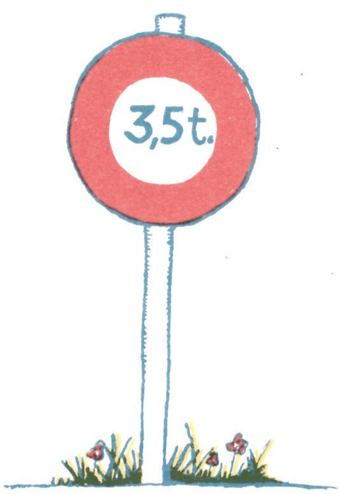
1,0 = **1,** beraz: KOMAREN ONDOKO ZEROEK ez dute balio, eta kendu egin daitezke; edo alderantziz, beharra gertatzekotan, komaren eskuin aldetik erantsi:

32,0 = 32
21 = 21,0
2,0 = 2
4 = 4,0

Gure zenbakuntzaren oinarria HAMAR izanik, oso balio handikoak dira «HAMARKI» hauek; eta maiz aurkituko dituzu eguneroko bizieran:

O	/o
0	3

→ 0,3



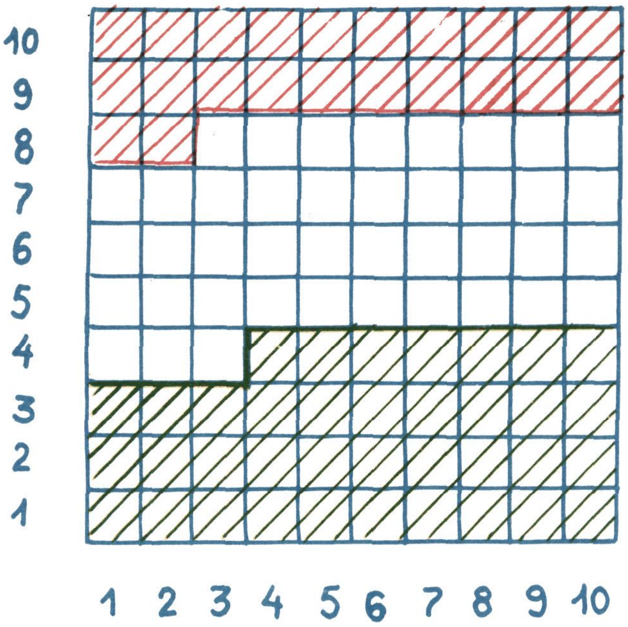
O	/o
1	5

→ 1,5

O	O	/o
2	8	1

→ 28,1

13.2.— Zati dezagun orain bateko bat EHUN zatitan:



Gorriturik agertzen den eskualdean: $\frac{22}{100}$ ditugu.

Komaren bitartez, hortaz, honela idatziko dugu:

$$\frac{22}{100} = 0{,}22$$

(= "zero koma hogei-ta-bi")

0	/0	/0
0	2	2

Era berean eskualde berdeari gagozkiolarik:

$$\frac{37}{100} = 0{,}37$$

Baita:

$$100 \times \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1{,}00 = 1$$

$$0{,}66 = \frac{66}{100}$$

$$0{,}85 = \frac{85}{100}$$

$$1{,}31 = \frac{131}{100} = 1 + \frac{31}{100}$$

13.3. — Pezeta batek ehun xentimo ditu. Libera batek ere ehun xentimo, baita dolar batek ehun zentabo. Beraz:

xentimo bat = 0,01 pezeta (edo libera, t.a;)
pezeta batek = 100 xentimo

Pezeta batek, bestalde, 10 txakurrandi ditu:

Beraz: 0,30 pta = 0,3 pta = 3 × 

Eta itzuletara:

 = 5 x 10 cts = 0,5 pta.

10 bider (xentimo bat) = 10 xentimo
$10 \times 0{,}01 = 0{,}1$
eta 10 bider (txakurrandi bat) = pezeta bat,
$10 \times 0{,}1 = 1{,}0 = 1$
Eta bide beretik:

3 ×  = 0,30 pta.

6 ×  = 0,60 pta.

Beraz:

$$10 \times 0{,}01 = 0{,}1$$
$$10 \times 0{,}32 = 3{,}2$$
$$100 \times 0{,}01 = 1{,}00$$
$$3{,}6 \times 10 = 36$$
$$0{,}5 \times 10 = 5{,}0$$

Hitz batez: HAMARKIETAN, × **10,** × **100** ... biderketa egiteko, koma ESKUIN ALDERA leku batez, bigaz... aldatuko dugu:

O	/o	/o	/o
0	3	6	1

$\times 100 =$

O	O	O	/o	/o
	3	6	1	

0,361	×	100	=	36,1 →
0,602	×	10	=	6,02 →
6,3095	×	100	=	630,95 →
7,015	×	100	=	701,5 →

13.4. — Alderantziz:

$$4275 \times \frac{1}{1000} = \frac{4275}{1000} = 4275 : 1000 = 4{,}275$$

$$38 \times \frac{1}{100} = \frac{38}{100} = 38 : 100 = 0'38$$

$$10 : 10 = \frac{10}{10} = 1 \therefore (10{,}0 : 10 = 1{,}00)$$

$$36{,}321 : 100 = 0{,}36321$$

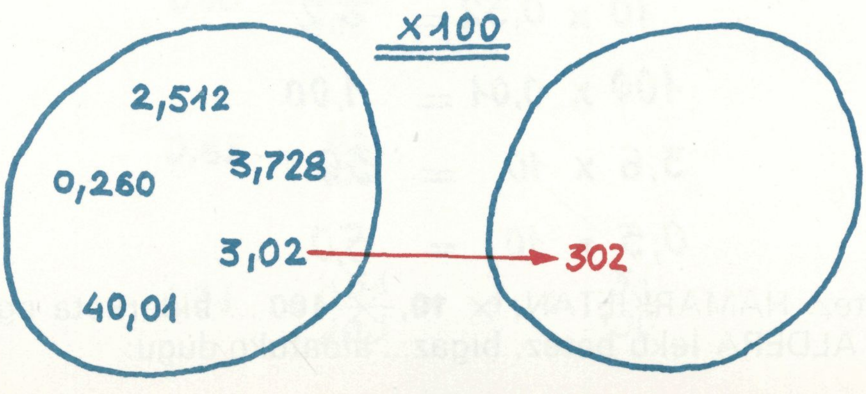
Alegia: **: 10, : 100**... burutzeko, aski da koma EZKER ALDERA leku batez, bigaz, ... aldatzea:

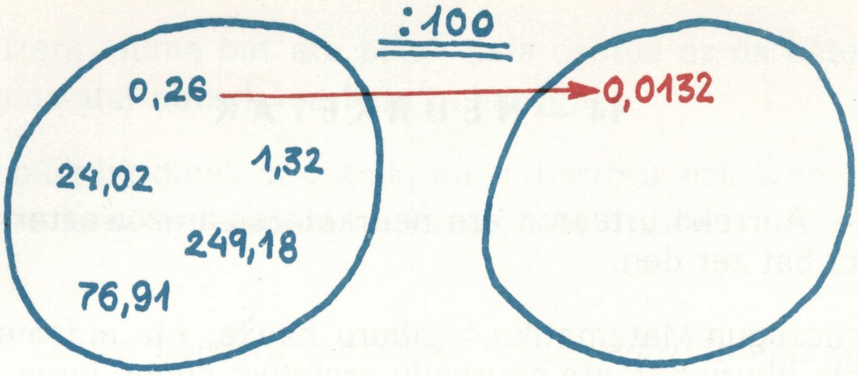
O	O	O	/o	/o
	3	6	1	

$: 100 =$

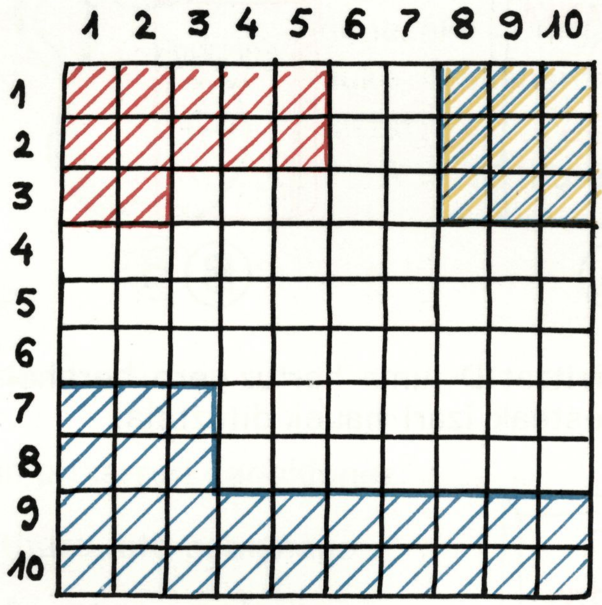
O	/o	/o	/o
0	3	6	1

13.5. — Osa itzazu marrazki hauek, lotkia guztiak marratuz:





13.6. —



Idatz itzazu gorriei, berdeei, urdinei eua zuriei dagozkien hamarkiak:

(gorri)
(berde)
(urdin)
(zuri)

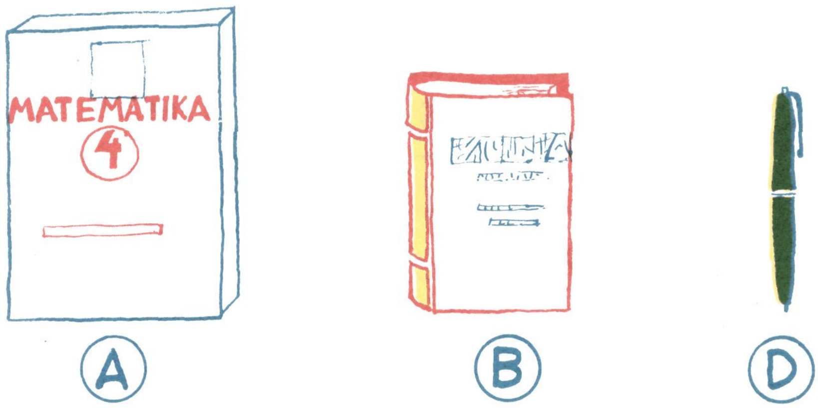
13.7. — Burura itzazu eragiketa hauek:

4536 : 10 =
4,087 × 100 =
0,065 × 100 =
780,00 : 100 =
65,46 × 10 =
979 : 1000 =
0,65 × 1000 =

14 — N E U R K E T A K

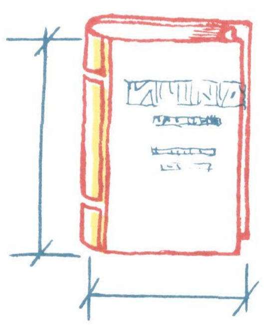
14.1. — Aurreko urteetan ere neurketaren arazoa azterturik, badakizu neurketa bat zer den.

Eman dezagun Matematika 4 - liburu hauxe; eta aldamenean jar ditzagun beste liburu bat, eta neurkailu erabiliko dugun luma:



Neurketa-oinarritzat D luma hartuz gero, berehala ageri da Matematika-liburuak eta besteak izari hauek dituztela:

$$\text{A} \begin{cases} L = 1, \ \text{luma} \\ Z = 1 \ \text{luma} \end{cases}$$



$$\text{B} \begin{cases} L = 1 \ \text{luma} \\ Z = 0, \ \text{luma} \end{cases}$$

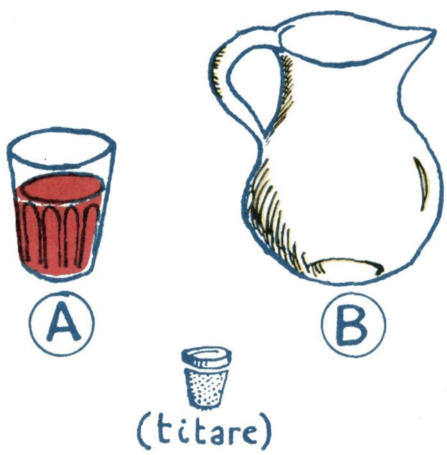
Neurpide hori berez egokia izanik ere (luzera bat neurtzeko bi LUZERA alderatu behar baitira), akats nabarmenak ditu:

1/ Luzera «luma bat eta piku» dela esatea ez da batere zehatza. Luma-atal batzuk markatu behar lirake.

2/ Lumak berdinak ez izanik, elkar hartzea ezinezko litzake, nor bere lumaren arabera mintzatuko bailitzake.

14.2. — Gauza berbera gertatuko litzake edozein neurketatan.

Eman dezagun ondoko baxo-erdia. Zenbat ardo dago?



Baso txikiago bat, edo titare bat, har genezake neurgarritzat, eta hau genuke A basoaren barnera edo kabiratzat:

A = 14 titare, eta gehixeago

Eta era berean pitxarrari dagokionez:

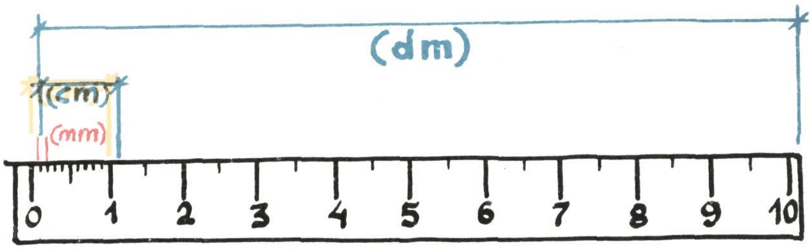
B = 92 titare, eta gehixeago

Titare guztiak berdinak ez izanik, ordea, neurketa ez litzake BAKUNA IZANGO **leku** guztietan eta **neurtzaile** guztien aburuaz; eta hautatu den neurri BAKAR berri horri «metro» deritza. Astronomiaren bitartez finkaturik, oinarrizko metro ofiziala, iridioz egina da, eta Parisen dago gorderik. Etxeetan eta lantegietan erabiltzen direnak (zurezkoak batzutan, galtzairuzkoak bestetan, eta abar) haren irudi edo kopia dira.

Metro hori oinarri, eta hamarkien zenbapidea gidari, «sistema metriko» deritzana sortu da. Sistema honetan (baina ez bestetan) neurkin-maila batetarik hurrengora pasatzeko, aski da $\times$ **10** (edo **: 10**) egitea.

Eta horrela ilara hau dugu:

1 metro (= 1 m) = 10 dezimetro (= 10 dm)
1 dezimetro (= 1 dm) = 10 zentimetro (= 10 cm)
1 zentimetro (= 1 cm) = 10 milimetro (= 10 mm)



Beraz:

$$1\ \text{dm} = 10\ \text{cm} = 100\ \text{mm}\ (= 10 \times 10)$$

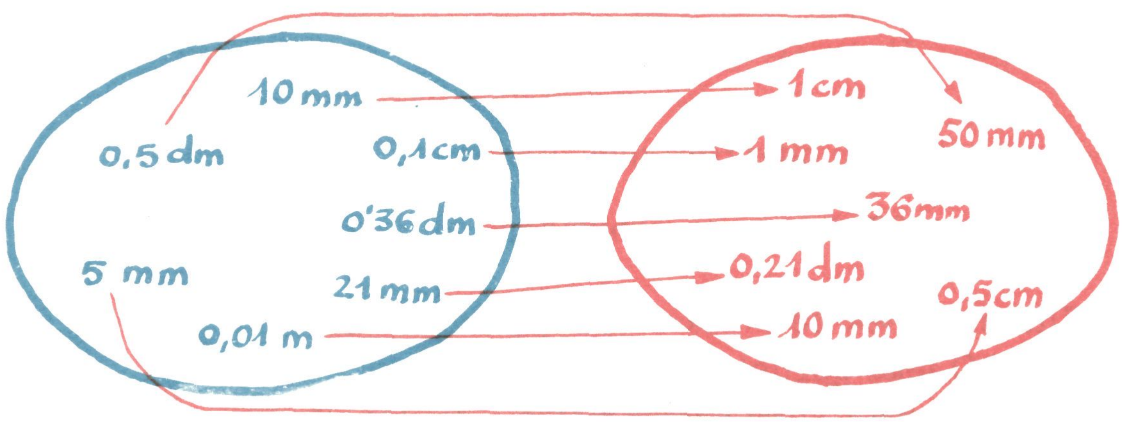
$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm}$$

$$1\ \text{mm} = \frac{1}{10}\ \text{cm} = 0{,}1\ \text{cm}$$

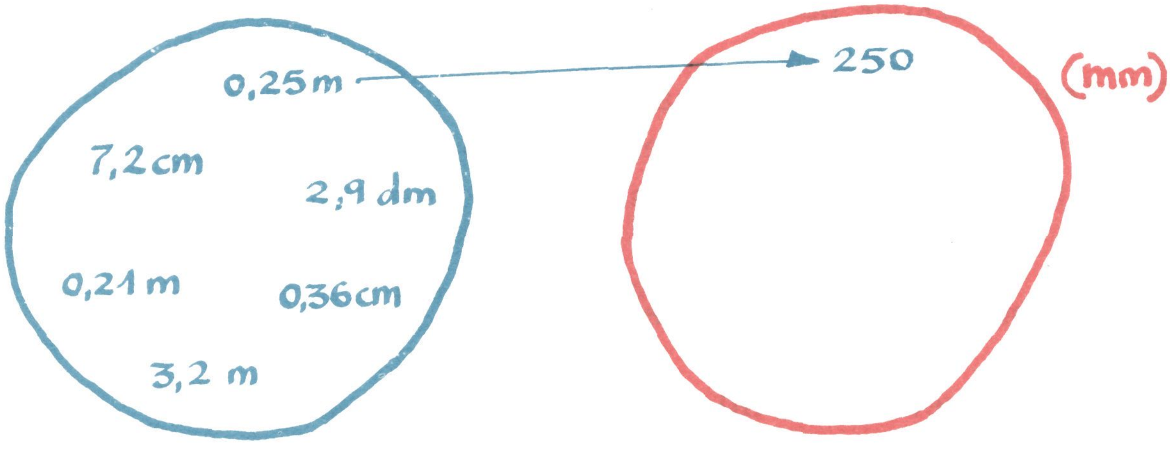
$$1\ \text{mm} = \frac{1}{100}\ \text{dm} = 0{,}01\ \text{dm}$$

$$1\ \text{mm} = \frac{1}{1000}\ \text{m} = 0{,}001\ \text{m}$$

14.4.— Azter ditzagun bi multzoon arteko loturak:



Eta era berean, baina oraingoan falta diren geziak zerorrek erasten dituzula:



Eta hortaz, zenbakuntzaren funtsaz gogoratuz:

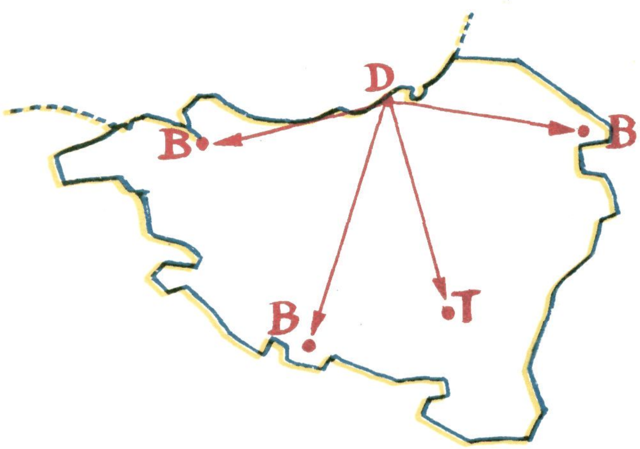
m	dm	cm	mm
0	3	6	1
	2	3	4
2	9	1	
3	5	0	5

Edo, 3,505 m (=3505 mm, jakina)

14.5.— Zure liburua neurtzekotan, **metroa** bera HANDIEGI gertatu, eta dezimetroa (1/10), zentimetroa (1/100) eta milimetroa (1/1000) asmatu diren bezala; beste batzutan metroa TXIKIEGI gertatu, eta metroa baino neurri handiago batzuk asmatu behar izan dira. Zenbapidetzat HAMAR harturik, hauek asmatu dira:

1 Dm = 10 m (= Dekametro)
1 Hm = 100 m (= Hektometro)
1 Km = 1000 m (= Kilometro)

Esate baterako:



Donostiatik:		
Bilbora	120	km
Biaizterira	160	
Tafallara	125	
Barkoxera	120	

Zerorrek errepara dezakezunez, askoz ere aisago erabiltzen dira zenbaki horiek, ondoko beste hauek baino: 120000, 160000, 125000 eta 120000. Horrengatik, hirien arteko tarteak **kilometrotan** eman ohi dira, eta ez metrotan.

Bila itzazu metrozko kideak:

2,38	Km	2380
0,32	Km	
3,21	Km	
2,0	Km	
1,06	Km	
7,5	Km	
82	Km	

Eta alderantziz:

3281 m ... ... 3,281 Km
307 m ... ...
4000 m ... ...
3500 m ... ...
14000 m ... ...
262 m ... ...
25 m ... ...

14.6. — Luzera baten neurketa, beraz, honelako tankerakoa izan daiteke:

3641,779 m.

Eta hortaz:

	Km	Hm	Dm	m	dm	cm	mm
	3	6	4	1	7	7	9

D = 3641,779 = 3 Km, 6 Hm, 4 Dm, 1 m, 7 dm, 7cm, 9 mm
= 3,641779 Km
= 36,41779 Hm
= 364,1779 Dm
= 3641,779 m
= 36417,79 dm
= 364177,9 cm
= 3641779 mm

Baita beste hau ere:

1 Km = 10 Hm = 100 Dm = 1000 m = 10000 dm = 100000 cm = 1000000 mm

14.7. — Ikusi duzunez, HAMARKITAN neurtzen dira gaur luzerak sistema metrikoan. Lehen ez zen hau gertatzen: oin batek 12 azbete ('foot'/ 'inch'); yarda batek hiru oin ditu; eta abar.

Luzeretan bakarrik ez hori. Dirua ere, aspaldiko txanpon-sistema zaharrei utzita, HAMARKITAN kondatzen da gaur dirua herririk gehienetan: pezetak 100 xentimo ditu, libera frantsesak 100 centime, esterlina berriak 100 cent, eta abar.

Diru-zenbaketan ere ez zen hau lehen gertatzen, oinarria ez baitzen hamar. Hogerlekoak, euskal izenak erakusten duen bezala, ez zituen 100'errealeko', baina **20**, eta 5 pezeta, ez hamar; esterlina zaharrak 20 shelling zituen, ez 10; eta shelling batek 12 pen, eta ez 10. Eta abar.

Pezetari gagozkiolarik, hau dugu:

1 pta = **100** xentimo

Gauza batek 8 pezeta eta 40 xentimo balio badu (eman dezagun) hamarkiak baliatuz hau idatz dezakegu:

S = **8,40** pta

Eta sos-baketak, kenketak, eta eragiketa guztiak horrela, HAMARKIAK erabiliaz burutuko ditugu:

$$\begin{array}{r} 4,30 \text{ pta} \\ 7,35 \\ +11,50 \\ \hline 23,15 \text{ pta} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7,75 \text{ pta} \\ -3,25 \\ \hline 4,50 \text{ pta} \end{array}$$

Lehen, berriz ere, ez zen hau gertatzen; eta gogoan hartu beharra dago. Esate baterako:

5 hogerleko 14 erreal
\+ 3 hogerleko 12 erreal

Honela egin behar zen:

8 hog. 26 erreal
= 9 hog. 6 erreal

Bestela, koma eta hamarkiak erabiliz, emaitza faltsua eman zukeen:

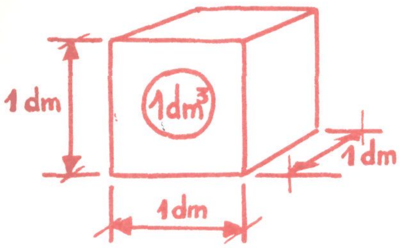
$$\begin{array}{r} 5,14 \\ +3,12 \\ \hline 8,26 \end{array} \text{ (faltsua)}$$

Diru-zenbaketa, horretara, gainerako neurketak bezalatsu (luzerak, zabalerak, barnerak, pisuak, eta abar) oraintsu bilakatu da HAMARKI (eta HAMAR oinarriko zenbakuntzan erraztu, beraz). Baina antzinako sistemen aztarnak (Bretaña Nagusikoak lekuko nagusi) ez dira zeharo suntsitu; eta sistima hamarkian ohitu garenoi trabagarri zaizkigu. Ordu-minutu-segundu zatiketa, esate baterako.

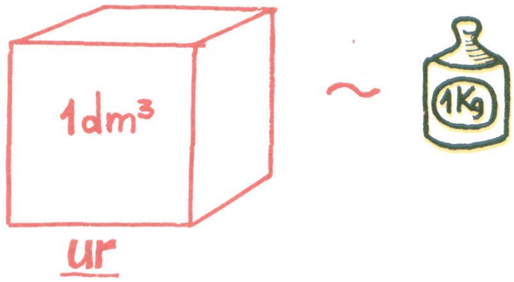
$$\begin{array}{rr} 4 \text{ ordu} & 50 \text{ min} \\ +\ 3 \text{ ordu} & 26 \text{ min} \\ \hline 7 \text{ ordu} & 76 \text{ min} \\ =\ 8 \text{ ordu} & 16 \text{ min} \end{array} \qquad \text{eta ez} \quad \begin{array}{r} 4,50 \\ +3,26 \\ \hline 7,76 \end{array}$$

orduen zenbakuntza ez baita hamarkia, hamar oinarrikoa.

14.8. — Era berean, pisu-neurketaren sistema zaharrak utzi, eta gaur METRIKO HAMARKIA nagusitu da gurean, baita munduko herririk gehienetan. Funtsezko kidetasuntzat hau dugu:



1 dm^3 (= «dezimetro barne bat»)



UR LITRO BATEK ... ... 1 kg. pisu
LITRO BATEK ... ... 1 dm × 1 dm × 1 dm =
1 dm^3 barne (= «dezimetro barne bat»)

Metroaz bezala jokatuz, hau dugu:

1000	l	Kl	(= «kilolitro»)
100	l	Hl	(= «hektolitro»)
10	l	Dl	(= «dekalitro»)
0,1	l	dl	(= «dezilitro»)
0,01	l	cl	(= «zentilitro»)
0,001	l ...	ml	(= «mililitro»)

Beraz:

A = 8 Kl, 6 Hl, 0 Dl, 3 l, 7 dl, 8 cl, 5 ml
= 8603,785 l = 8,603785 Kl
= 86,03785 Hl
= 860,3785 Dl
= 8603,785 l
= 86037,85 dl
= 860378,5 cl
= 8603785, ml

14.9. — Bide beretik neurtzen dira gaur, sistema metrikoan, haztak edo pisuak (antzinako neurriak galtzen ari dira: arrua, eta abar). Neurri funtsezkotzat GRAMOA hartu da:

(1 cm × 1 cm × 1 cm) barne urek ...... GRAMO bat pisu.
35 cm^3 urek, beraz ...... 35 g
3621 cm^3 urek ...... 3621 g. Eta abar.

Bide horretatik, beraz, hau dugu:

1 000 000 g	... tonelada (t)
100 000 g	... kintal (q)
10 000 g	... miriagramo (Mg)
1 000 g	... kilogramo (Kg) = «kilo»
100 g	... hektogramo (Hg)
10 g	... dekagramo (Dg)
1 g	... gramo (g)
0,1 g	... dezigramo (dg)
0,01 g	... zentigramo (cg)
0,001 g	... miligramo (mg)

Osa itzazu, beraz, ondoko berdintza hauek:

3421 g	=	34,21	Hg
7,65 Kg	=		g
0,33 t	=		Kg
3,401 g	=		dg
4 Kg	=		cg
77,601 g	=		q

14.10. — Beste alde batetik, iaz ikusi genuenez:

$$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000000\ cm^3 = 1000\,000000\ mm^3$$

eta bestetik, betegarritzat ura delarik:

eta horrela BERDINTZEN URREZKO TAULA GISA ONDOKO HAU DUZU:

BARNERA		pisu
m^3	Kl	t
	Hl	q
	Dl	Mg
dm^3	l	Kg
	dl	Hg
	cl	Dg
cm^3	ml	g
		dg
		cg
mm^3		mg

Zenbat pisatzen dute ondoko urketa hauek?

0,37 Kl =

7,65 Hl =

0,33 dl =

56,98 Dl =

67549 ml =

0,876 Hl =

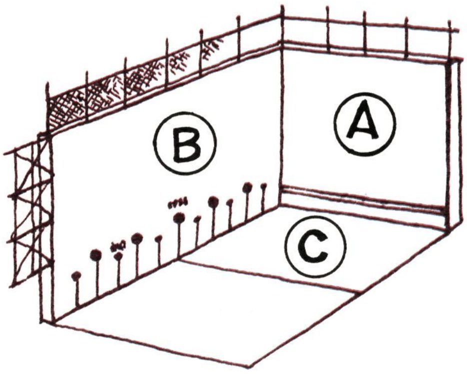
0,0089 Kl =

4,4365 cl =

15 — LAUAK ETA ZUZENAK

15.1. — Aurreko urteetan ikasirik, laua zer den badakizu: **puntu multzo berezi bat.**

Zure liburuaren azala lau baten parte bat da; eta lau aldeetatik zabalduz gero, egiazko lau osoa eta mugagabea izango zenuke. Pratikan, beraz, lauen zatiak ezagutzen dituzu.

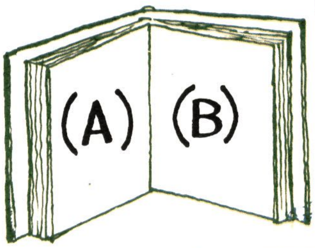


Frontoinaren aurreko horma, lau bat da (lau puska bat, alegia, (A))

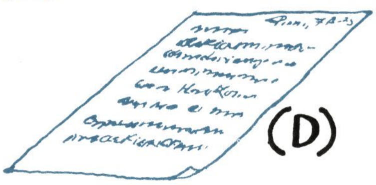
Ezkerreko horma, era berean, beste lau puska bat da (B); eta zorua, jakina, beste lau puska bat (C).

Frontoin batek, hortaz, hiru lau-atalek osatzen dute.

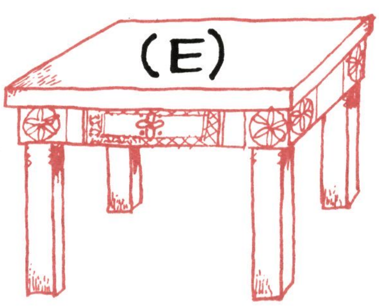
Gauza bera ondoko etsenplu hauetan:



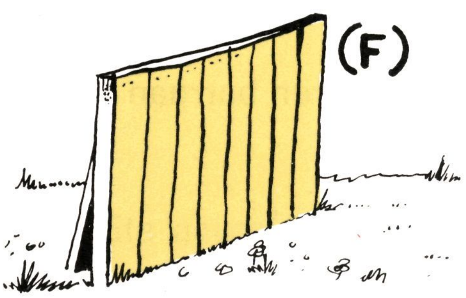
Liburu hau bi lau-atalek osatzen dute.



Idatzi duzun papera, era berean, lau baten atala da (D)



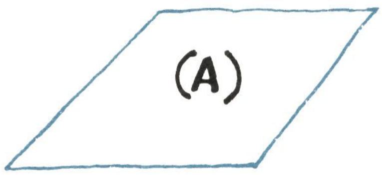
Eta mahainaren taula, lau-puska bat da. (E)



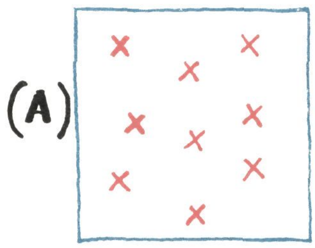
Gauza bera hesi zuzen honen oholen segida (F)

Ohartu dukezunez, eskuarki HIZKI NAGUSI BAT erabili dugu laua izendatzeko:

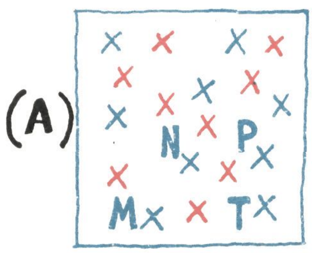
(A) laua, (C) laua, (D) laua, ...



Eman dezagun A laua, parte txiki batez adierazia (orri batez, eman dezagun); eta azter dezagun barneko puntuen arazoa.



Puntu sail bat atxeman dezakegu (A) lau horretan, eta gorriz marka:



Iaz ikasi genuenez, beti erants daitezke puntu gehiago eta gehiago (urdinez markatuak oraingoan). Eta abar.

Beti erants daiteke puntu gehiago (beti aurki daiteke puntu gehiago). Edo, beste modu batez esateko, lau baten puntu-kopurua mugagabea da, infinitu da; eta M, N, P eta T puntuak (A) lauaren BARRUAN daudelako, berdintza hauek idatz ditzakegu:

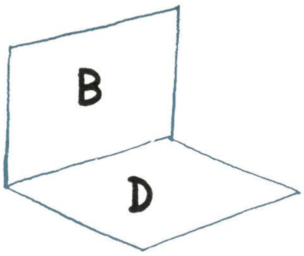
$M \in A$ (= «M puntua A-ren barruan dago»)

$N \in A$

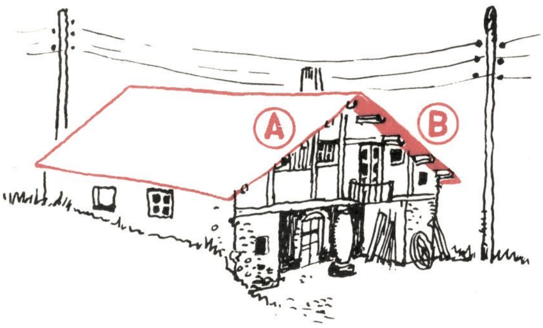
$P \in A$

$T \in A$

15.3. — Tolos ezazu paper-orria; eta hau izango duzu:

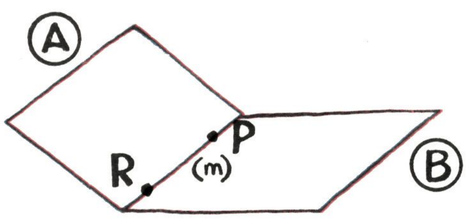


Alegia: (B) eta (D) lau-atalak lortuko dituzu.



Teilatu hau, esate baterako, (A) eta (B) lauek osatzen dute.

Bi lauen ebaketa, zerorrek ikus dezakezunez, zuzen bat da (**m** zuzena, hemen ezkerretan ageri)



Edo, bestela adieraztekotan:

$$A \cap B = m$$

Eman ditzagun (A) eta (B) lauak, eta bien ebaketan sortzen den **m** zuzena:

P puntua, gonbarazio baterako, A-koa da, B-koa da, eta **m** zuzenekoa ere bai. Beraz:

$$P \in A$$
$$P \in B$$
$$P \in m$$

R puntuaz, era berean, berdintza antzekoak idatz daitezke:

$$R \in A$$
$$R \in B$$
$$R \in m$$

Eta gauza bera **m-ko** edozein puntuz. Beraz:

$m \subset A$ (**m** zuzena A-ren azpi-multzo da)
$m \subset B$ (baita B multzoaren azpi-multzo ere)

Zuzena, beraz, lauaren azpi-multzo agertzen zaigu:

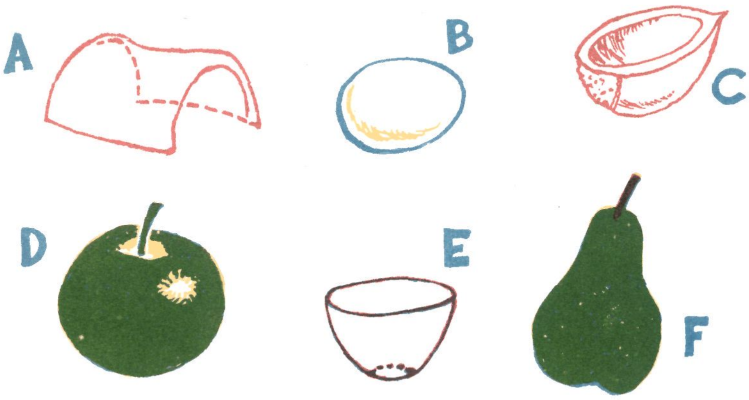
$$P \in m \qquad P \in A$$
$$T \in m \qquad T \in A$$
$$S \in m \qquad S \in A$$

Baina A-ko puntu guztiak, gisa denez, EZ DAUDE **m** zuzenean, eta

$$A \supset m$$

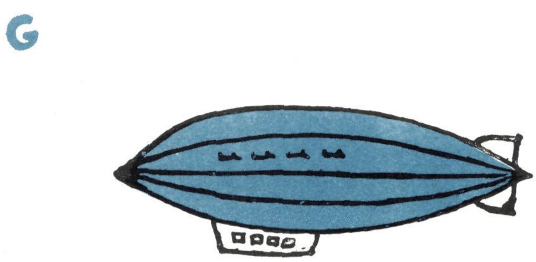
15.5. — Har ditzagun orain kontutan AZALAK, edozein azal.

Infinitu puntuk osatzen du bakoitza, laua bezala.



Azal horiek guztiak MAKURDUNAK dira; EZ DIRA LAUAK.

Sagarraren eta udarearen AZAL BERDEAK ez dira lauak: makurrera bat dute puntu guztietan.

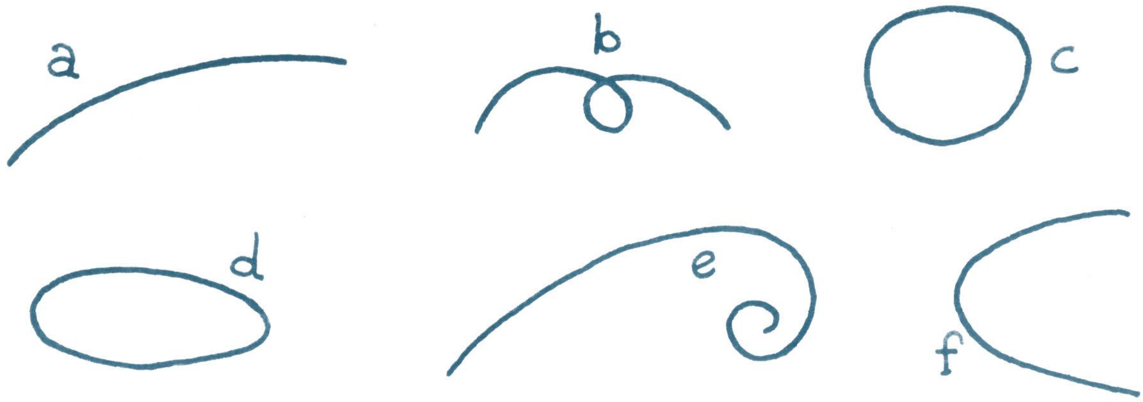


Laua, beraz, MAKURRERARIK GABEKO AZAL BAKARRA, AZAL BEREZI BAT DA; edo, bestela adieraztekotan:

$$\{\text{lauak}\} \subset \{\text{azalak}\}$$

Lauen multzoa azalen azpi-multzo bat da.

15.6. — Era berean, eman ditzagun marra makur hauek:



Zerorrek ikus dezakezunez infinitu puntuk osatzen du bakoitza; baina EZ DIRA ZUZENAK. Marren multzo zabalean, beraz, zuzena oso MARRA BEREZIA da: denetan bakar bat ageri da zuzen gisa.

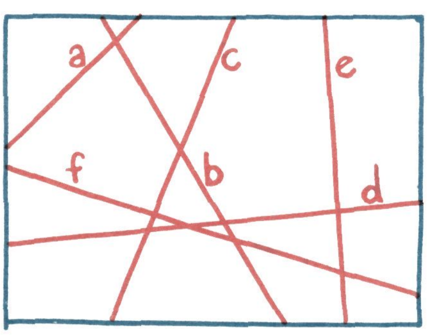
Makurrera galdu ala, zuzenetik hurbiltzen gara; eta azkenean BAT, makurrera OSOKI GALDU duen marra, ZUZENA DA.

Hortaz:

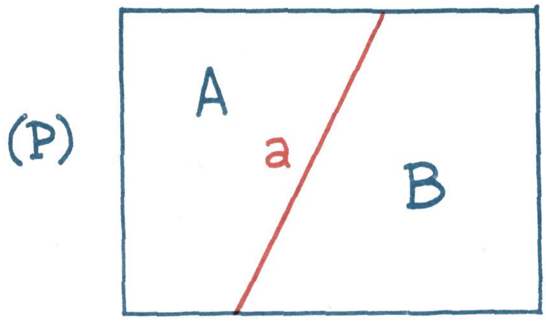
$$\{\text{zuzenak}\} \subset \{\text{marrak}\}$$

15.7. — Marraz itzazu sei zuzen, eman dezagun . Zeure orrialdean hau duzu:

a, b, c, d, e, f.



Beterik dago orrialdea? Ez horixe. Beti erants dakioke zuzen gehiago eta gehiago:

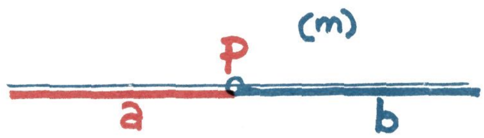


Infinitu zuzenek osatzen du laua.

Zuzen batek, bestalde, BI PARTETAN zatitzen du laua: A eta B. A eta B horrela bi LAU-ERDI dira. Eta hau idatz dezakegu:

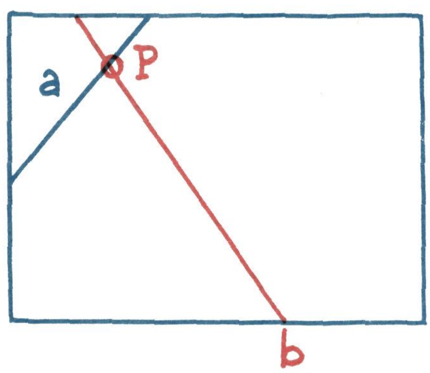
$$A \cap B = a$$
$$A \cup B = P$$

Era berean,

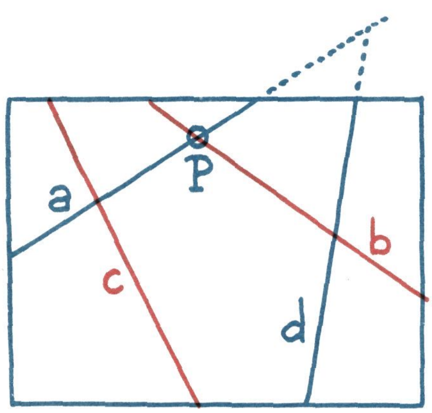


P puntuak bi partetan zatitzen du (m) zuzena: **a** eta **b.** Hauetako bakoitza ZUZEN-ERDI bat da.

15.8.— Bi zuzenen ebaketa puntu bat da:



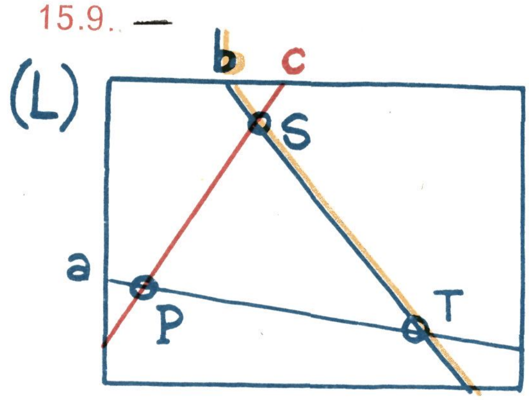
$$a \cap b = P$$



Horra hor zuzen mordo bat (a, b, c, eta d)
Marraz itzazu beroien ebaketak, eta adieraz ezazu hori matematikazko idazkeraz:

$a \cap b = P$
$a \cap c =$
$a \cap d =$
$b \cap c =$
$b \cap d =$
$c \cap d =$

15.9. —



Horra hor ezkerretan **a, b** eta **c** zuzenak **L** lauean. Ebaketak hauek dira:

$$a \cap c = P$$
$$c \cap b = S$$
$$a \cap b = T$$

PT zuzen-atalari ZUZENKI deritza, eta hau dugu:

$\overline{PT} \subset a$ (= $\overline{PT}$ zuzenkia **a** zuzenaren azpi-multzo bat da).

PT zuzen-puska edo zuzenkiak badu luzera bat:

$\overline{PT} = 4$ cm, eman dezagun.

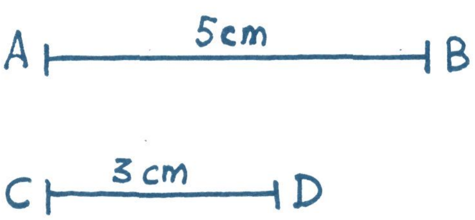
Zuzena berriz, osorik hartuta, mugagabea da, neurrigabea da, eta luzera infinitu du, **edozein luzera** baino handiago beraz.

Zuzenkiak, berriz, bi muga ditu bi puntutan; eta hauen arteko zuzen-tartea du luzeratzat.

Era berean, beraz:

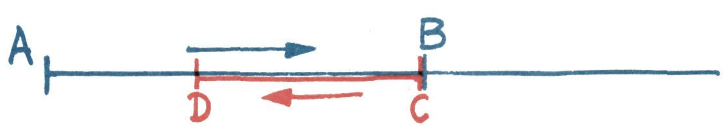
$$\overline{PS} = 3 \text{ cm.}$$
$$\overline{ST} = 4{,}5 \text{ cm.}$$

Zuzenkiak BATU edo KENDU egin daitezke:



AB + CD

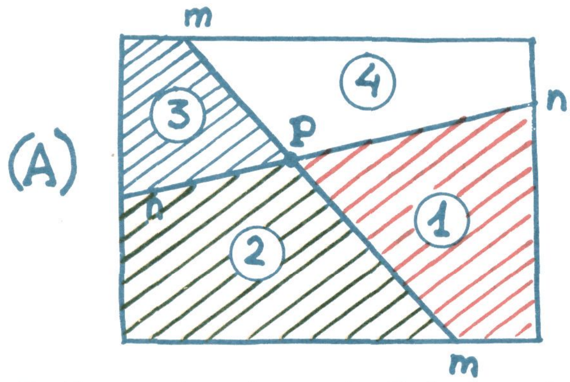
AD = AB + CD = 5 + 3 = 8 cm.



AD = AB − CD = 5 − 3 = 2 cm.

16 — ANGULU ETA SIMETRIA

16.1. — Anguluen berri baduzu dagoeneko; baina lerro batzutan gogoraziko dugu aurreko urteetan ikasitakoa.



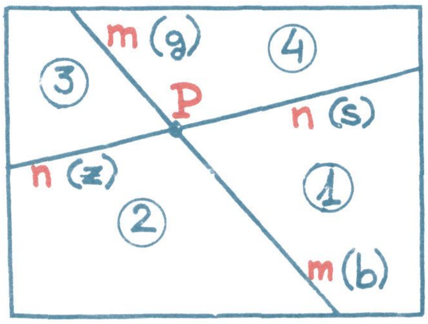
Eman ditzagun **m** eta **n** zuzenak (A) lauean. Bion ebaketa **P** puntua da.

Zerorrek ikus dezakezunez, laua **lau** angulu-eskualdetan zatiturik agertzen da: 1, 2, 3 eta 4. (m) zuzena, bestalde, **bi** partetan zatiturik gelditu da: P-tik gorakoa bata, P-tik beherakoa bestea. Eta (n) zuzena, era berean, **bi** partetan ere zatiturik: P-tik ezkerretakoa bata, P-tik eskuinetara bestea.

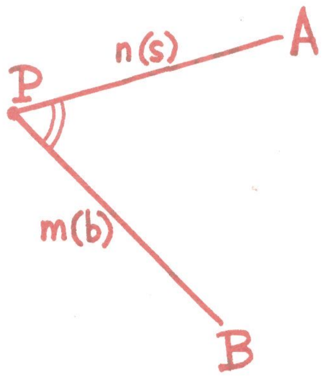
Badituzu, hortaz:

a) lau **zuzen-erdi:** bi **m**-ren gainean, eta bi **n**-ren gainean.

b) lau **angulu-eskualde:** 1, 2, 3 eta 4.



Beraz, honela bataia ditzakegu sortu diren eskualdeak eta zuzen-erdiak.

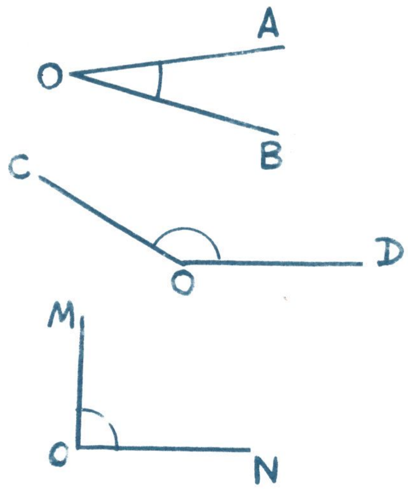


Bi zuzen-erdik ANGULU bat osatzen dute, APB edo BPA irakurria (alegia, anguluaren **erpina** beti erdian).

Ainguru honek **bi alde** ditu :

PA eta P.B.

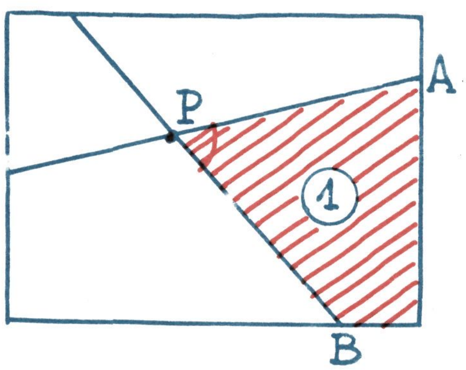
Era berean, hona hemen beste angulu batzuk:



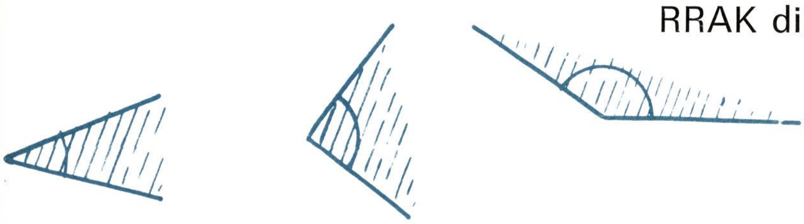
$\widehat{AOB}$ edo $\widehat{BOA}$

$\widehat{COD}$ edo $\widehat{DOC}$

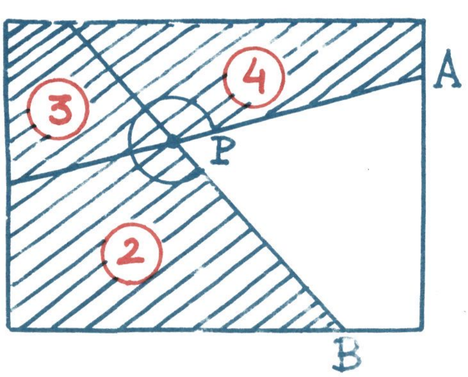
$\widehat{MON}$ edo $\widehat{NOM}$



Angulu batek ESKUALDE BAKAR BAT besarkatzen duelarik, angulu KONKORRA dela esan ohi da:

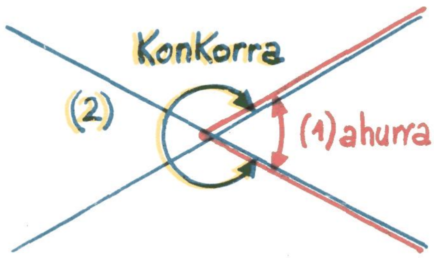


Ezkerreko ainguru hauek KONKORRAK dira.

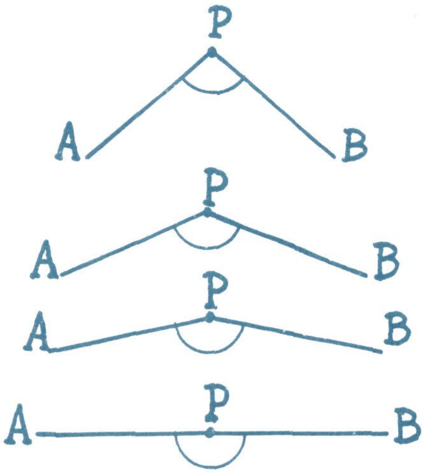


Angulu batek, berriz, HIRU ESKUALDE besarkatzen dituelarik, angulu AHURRA dela esan ori da.

Ezkerreko hauek ainguru AHURRAK dira.

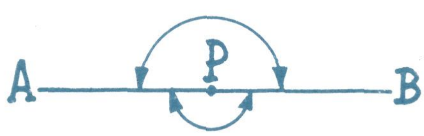


Edozein zuzen-ebaketatan, beraz, (AOB) beti hauta daitezke bi angulu: angulu KONKORRA (1), eskuarki erabili ohi dena; eta AHURRA (2). Ageri denez, zuzenerdi eta erpin BERBEREK osatzen dituzte biok; baina besarkatzen dituzten angulu -eskualdeak desberdinak dira.

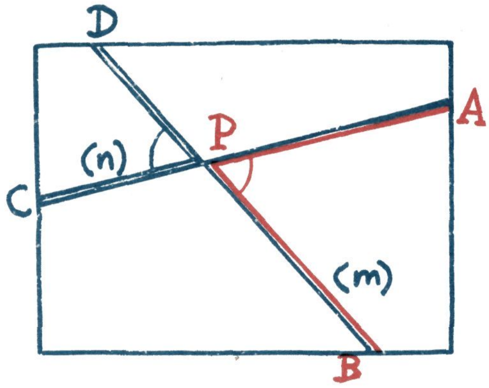


Angulu **konkor** bat zabaldu eta kamustu ala (eta dagokion ahurra hestutu ala, beraz) angulu berezi bat lortzen da halako batez: SASIZUZENA deritzana.

Kasu honetan PA eta PB zuzen berberaren erdiak baizik ez dira, eta dagozkion bi anguluak (ahurra eta konkorra, alegia) BERDINAK DIRA, eta biak SASIZUZENA: bata gainetik bestea beheretik neurtuak.



16.3. — Beste era batez hauta daitezke aldeak zuzen-ebaketa batetan.



Gorriz markatu dugun APB angulua, esate baterako, **n** zuzenaren erdi batez edo **m** zuzenaren beste erdi batez osatua da.

Eta era berean, marrazki honetan markaturik, CPD angulua **n** zuzenaren bigarren parteaz eta **m**-ren bigarren parteaz ere egina da.

APB eta CPD angulu hauek, dakigun bezala, ERPIN-AURKAKOAK dira. Berdinak dira biok:

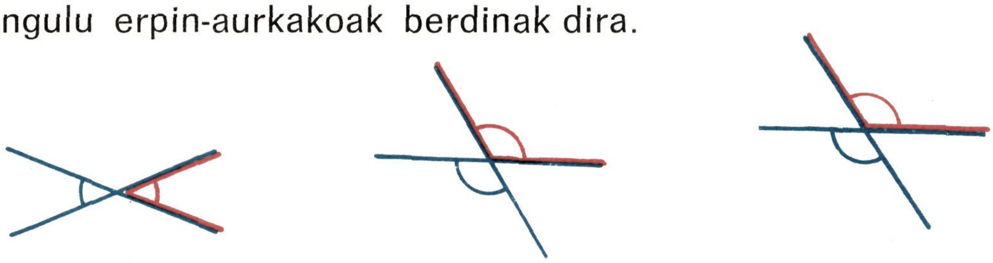
$$\widehat{APB} + \widehat{BPC} = \text{sasizuzen bat}$$

$$\widehat{CPD} + \widehat{BPC} = \text{sasizuzen bat}$$

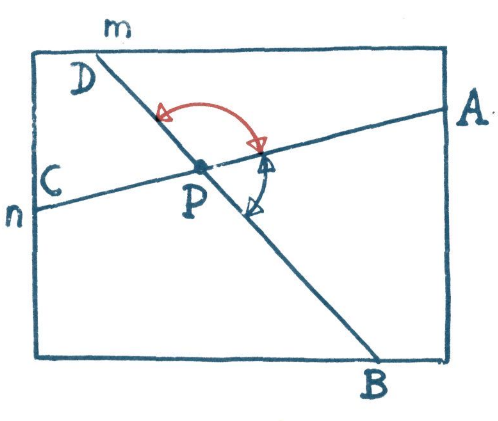
Sasizuzen bat emateko, hortaz, bai APB anguluari, bai CPD anguluari, angulu BERBERA falta zaie: BPC angulua, jakina. Beraz:

$$\widehat{APB} = \widehat{CPD}$$

Angulu erpin-aurkakoak berdinak dira.



16.4. — Beste era batez hauta ditzakegu oraino ere anguluak zuzen-ebaketa batetan.



Alde bat, (PA) oraingoan, berbera biontzako; eta beste biak (PD eta PB) zuzen berberaren BI zuzenerdi izanik:

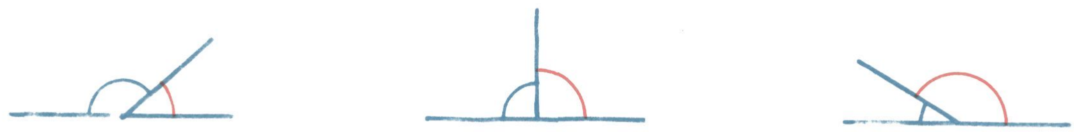
$\widehat{APD}$ eta $\widehat{APB}$

Eta, era berean, $\widehat{DPC}$ eta $\widehat{CPB}$ anguluak.

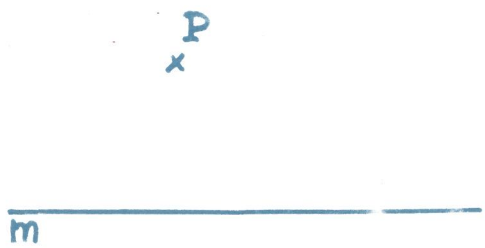
Bion baketa angulu sasizuzena da:

$$\widehat{APD} + \widehat{APB} = \text{sasizuzena}$$

$$\widehat{DPC} + \widehat{CPB} = \text{sasizuzena}$$



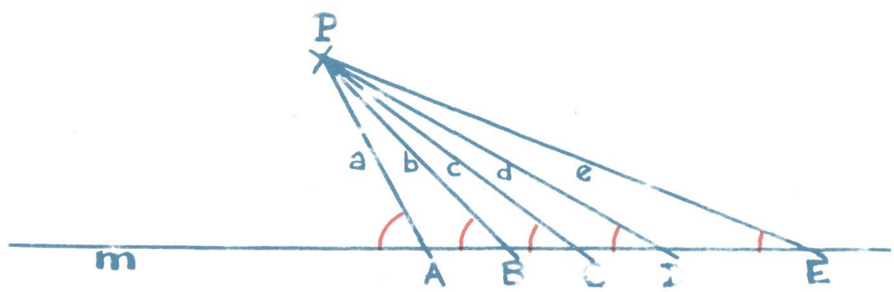
Angulu hauei ANGULU HAUZO derizte.



16.5. — Eman dezagun orain zuzen bat **(m)** eta honetatik at P puntua.

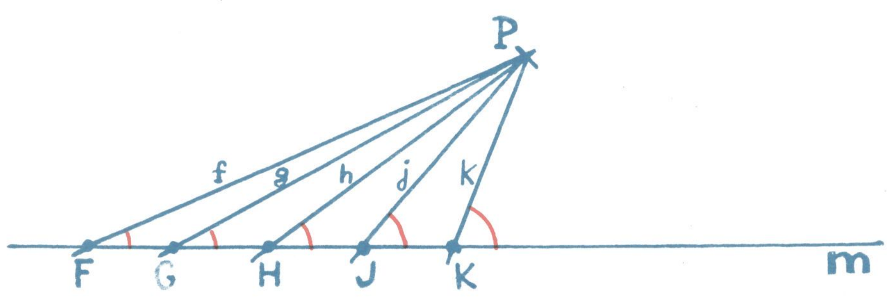
Eman dezagun orain zuzen bat **(m)** eta honetatik at P puntua.

Eta has gaitezen orain, P-an barrena, **a, b, c** eta **d** zuzenak marrazten. Eta eite hau dugu:



Zerorrek soma dezakezunez, gorriz markatu dugun angulua GERO ETA TXIKIAGO DA ESKUIN ALDETIK.

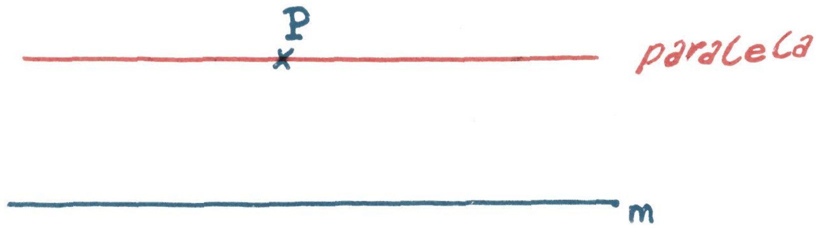
Eta ezker aldetik orain:



Ezker aldetik ere, P-tik urrundu ala GERO ETA TXIKIAGOA.

Zuzenak, beraz, halako batez EZKER ALDETIK ebakitzen du **m,** eta segidan zeharo ESKUIN ALDETIK; eta angulua handituz bazijoan ezkerretan, txikituz doa eskuin aldetik P-ren azpitik pasatu ondoren.

Badirudi, beraz, memento batez, eta P-tik igarotzen den zuzen BATI buruz, edozein puntu baino HARAGO ebakitzen duela ebakitzaileak oinarritzat hartu dugun zuzena.

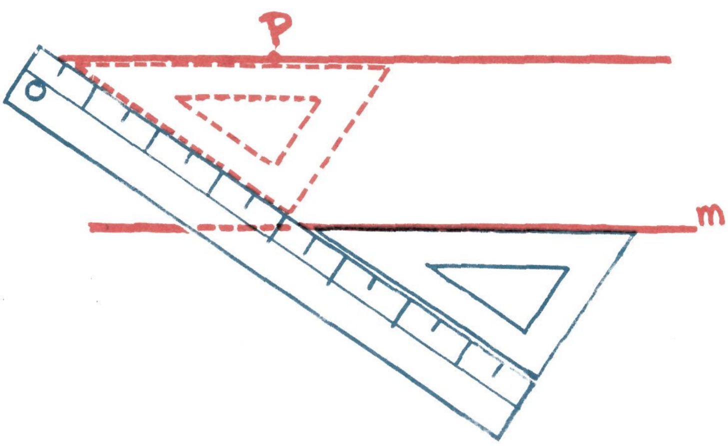


Zuzen berezi horri PARALELA deritza; eta Euklides-ez geroztik BAKARRA dela onartzen da geometria eskuarrean.

Baina ideia hau onartu ez duten beste geometriarik badago (Euklidesen ondoren asmatuak); eta Fisikan eta Izadiaren azalpenean arrakesta harrigarriak bildu dituzte (Einstein).

Jakin zazu oraingoz EUKLIDESEN OINARRIA (alegia, P-tik paralela bakar bat baizik ezin daitekeela pasaraz) eguneroko geometria guztiaren oinarri egokia dela, eta askikoa. Baina bestelakorik ere asmatu dela, eta ez funtsez ahulagorik.

Nola marraz zenezake paralela hori?

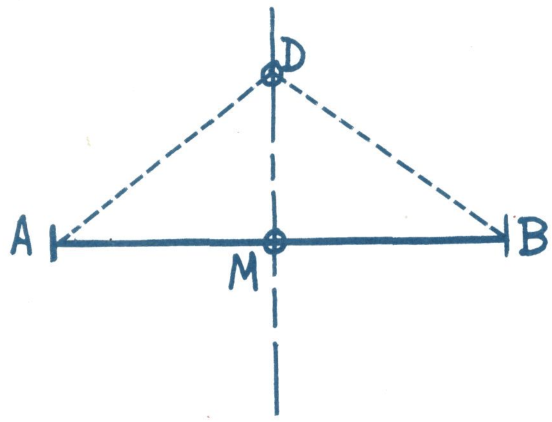


Aski duzu horretarako eskuaira bat eta erregela bat.

Pausa zazu aurrenik **m** zuzenaren arabera, eta gero honen kontra erregela. Hau lorturik, aski duzu erregelarik ermoki atxikitzea, eta eskuaira P punturaino erregelaren ertzetik lerratzea.

Egin itzazu zerorrek ariketa batzuk.

16.6. — Har dezagun orain AB zuzenkia, eta izan bedi M zuzenkiaren erdia. Esate baterako:



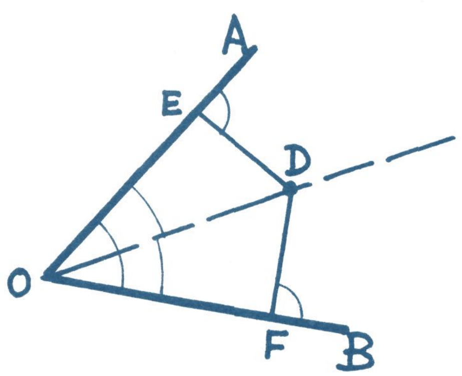
AB = 6 cm
AM = 3 cm
MB = 3 cm

M-tik AB-kiko elkarzut edo perpendikulare bat marrazten baldin badugu, zuzen honi ERDIZUTA deritza (erd.mediatriz, médiatrice).

Edozein puntutatik ((D)tik, eman dezagun) A eta B-rainoko tarteak BERDINAK dira:

AD = BD

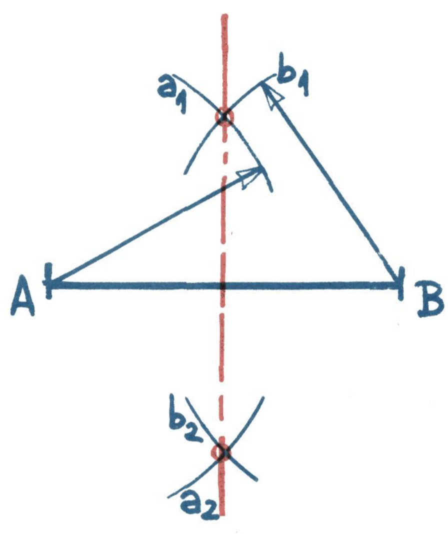
Era berean, har dezagun orain AOB angulu bat.



Angulua **bi parte berdinetan** zatitzen duen zuzenari (OM) ERDIKARI deritza (erd. bisectriz, bissectrice).

DE (OA-ri elkarzut), eta DF (OB-ri elkarzut) zuzenkiak, BERDINAK DIRA OM guztian barrena.

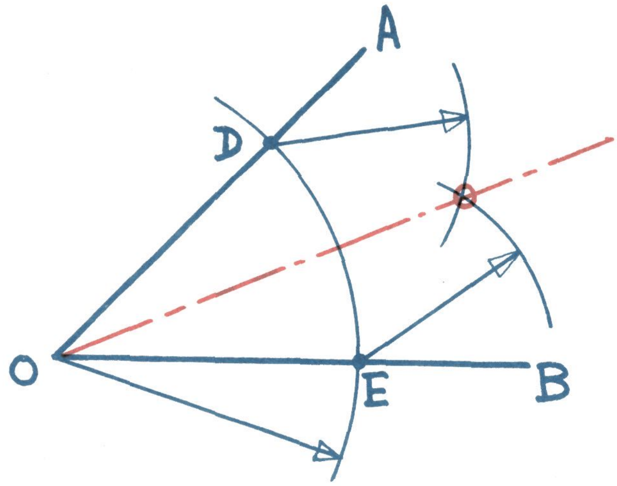
16.7. — Nola marraztuko pratikan, erregela eta konpasa baliatuz?



Har zazu konpasa, eta pausa zazu A-n punta bat; eta edozein zabalera emanez (AP, esate baterako, AB baino txikixeago) marraz ezazu goitik eta behetik a 1 eta a 2 arkuak.

Konpasaren zabalera ALDATU GABE, pausa zazu orain punta B-an, eta marraz itzazu **b** arkuak.

M eta N puntuak lortuko dituzu horrela; eta biak zuzen batez lotuaz ERDIZUTA dukezu.

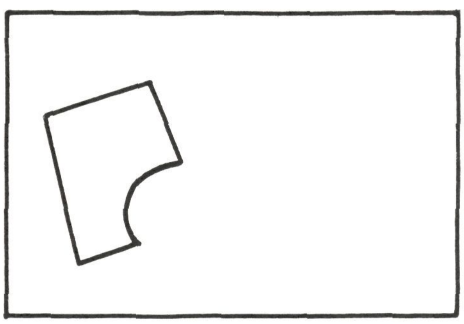


Ikus dezagun orain ERDIKARIA.

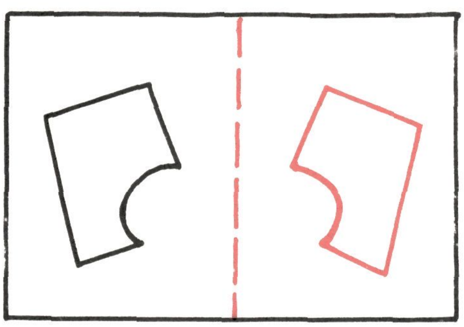
Pausa zazu konpasaren punta O puntuan; eta, edozein zabaleraz, marraz ezazu DE arkua: D, OA-n, eta E, OB-n. Oinarritzat orain, eta puntaren jiragunetzat D hartuz, arku bat marraztuko dugu; eta zabalera BERBERAZ orain E jiragunetzat, beste arku bat.

Lortutako puntua (M) eta O lotuaz, zuzen horri ERDIKARI deritza; eta angulua bi parte berdinetan zatitzen du.

16.8.— Har zazu orain paper-orri bat, eta tinta urtsuaz margo zazu edozein eite:

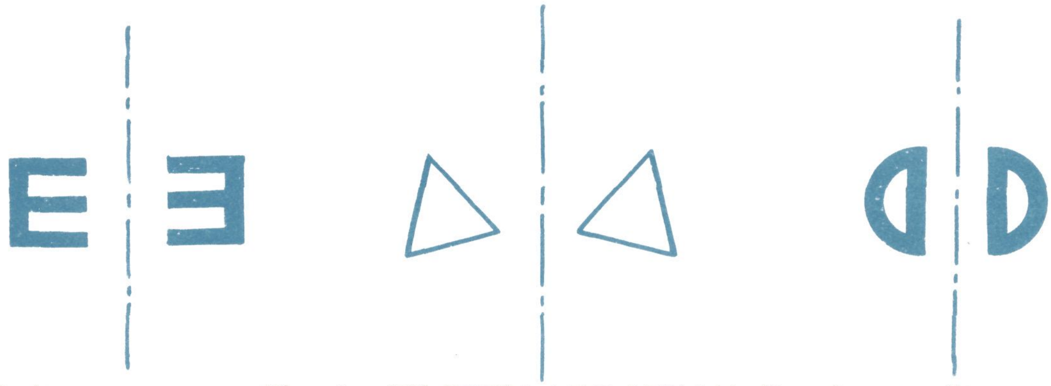


Tinta lehortu baino lehenago, orain, tolos ezazu zeharo paper-orria, bi orri erdiok elkar ikutu arte. Ondoko eite hau lortuko duzu.

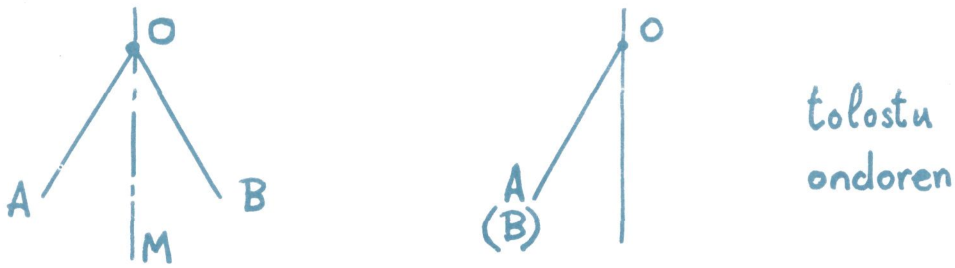


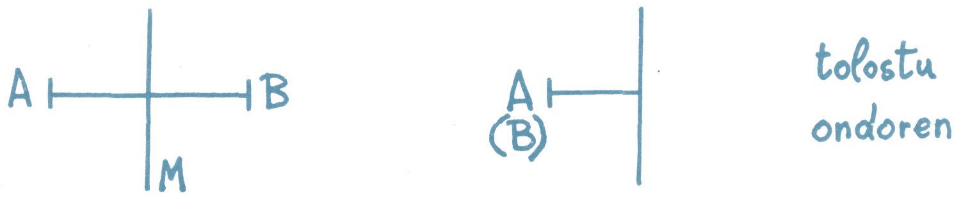
Jatorrizko eitea eta irudia BERDINAK dira, bai baina ezin daitezke elkarren gainera eraman papera tolostu gabe. Bi eiteren berdintasun berezi honi SIMETRIA deritza (bi eiteok ELKARREN SIMETRIKOAK dira); eta elkarketa horretara daraman zuzenari SIMETRI-ARDATZA.

Hona hemen beste eite simetriko batzuk:

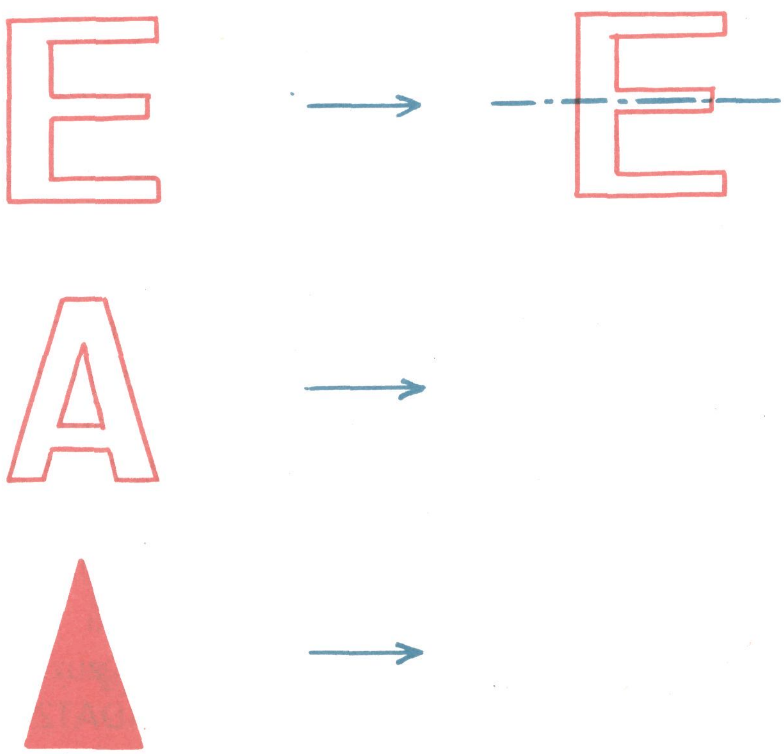


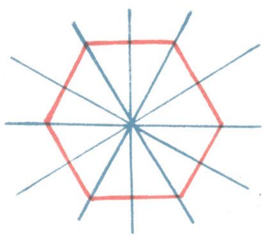
Erdizuta eta erdikaria SIMETRI-ARDATZAK dira (sortu dituzten zuzenkiaren eta ainguruaren arabera).



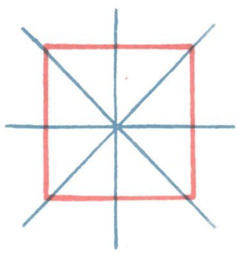


16.9. — Bila itzazu ondoko eiteen simetri-ardatza:

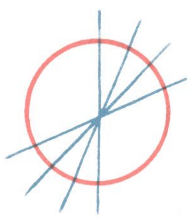




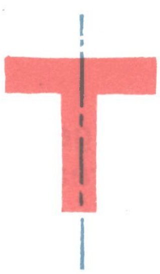
Hexagono honek (berdina delako) 6 simetri-ardatz ditu.



Lauki berdin honek 4 simetri-ardatz ditu.



Ingurumak nahi hainbat simetri-ardatz du, infinitu.

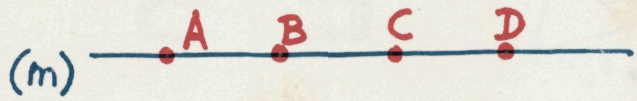


Baina T letrak, aldiz, bakar bat du.

17 — POLiGONOAK

17.1 —

Eman dezagun (m) zuzena, eta agerraraz ditzagun honen puntu batzuk: A, B, C, D...



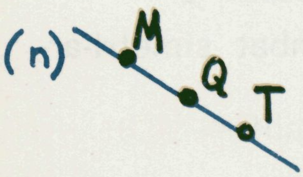
(m) zuzena PUNTU-MULTZO bat da:

$$m = \{ A, B, C, D, \dots \}$$

eta hortaz:

$$A \in m$$
$$B \in m$$
$$C \in m$$
$$D \in m$$

Gauza bera esan dezakegu edozein zuzenez:



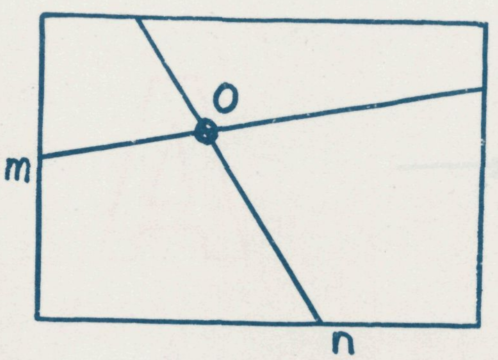
$$n = \{ M, Q, T \dots \}$$

eta $M \in n$

$Q \in n$

$T \in n$

17.2. —



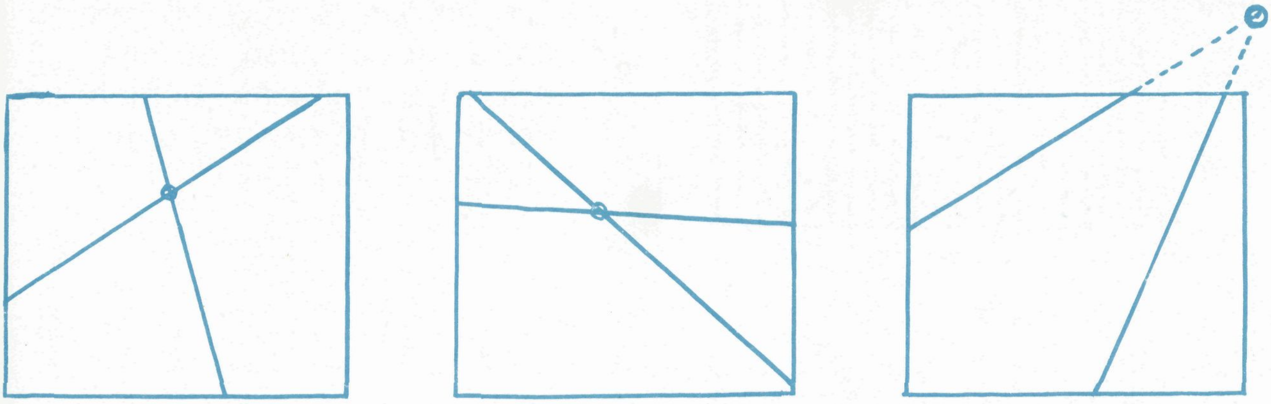
Biak batera gertatuz gero (L) lau berberean, bai **m** bai **n**, biok puntu-multzo esan dugunez, lau osoari buruz AZPI-MULTZO dira zuzenak; eta hau idatz dezakegu:

$$m \subset (L)$$
$$n \subset (L)$$

Zein da BATERA **m**-ko eta **n**-ko puntua?

Alegia, zer da $\underline{m \cap n}$ ebaketa?

Marrazkian ageri denez, badugu O puntua; eta, eskuarki, lau bereko bi zuzenek puntu batetan ebakitzen dute elkar:



Lau bereko bi zuzenek, ordea, elkar inon ebakitzen ez dutela gertatuz gero, hau dugu:

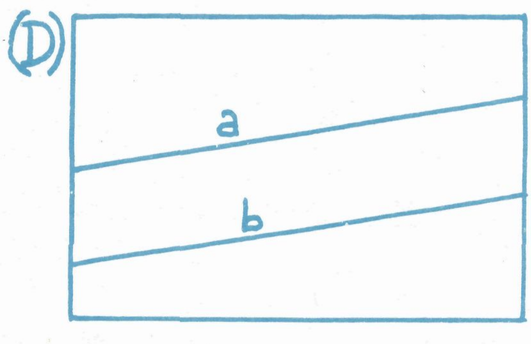
$$m \cap n = \emptyset$$

Kasu honetan ez dago lau guztian barrena punturik batere **m**-ko eta **n**-ko BATERA denik. Eta bi zuzen horietaz PARALELO direla esan daiteke, eta hau idatz:

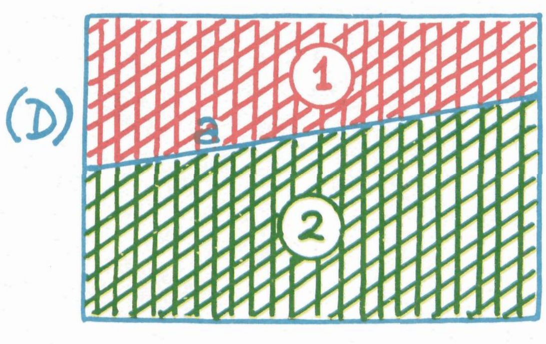
$$m \parallel n$$

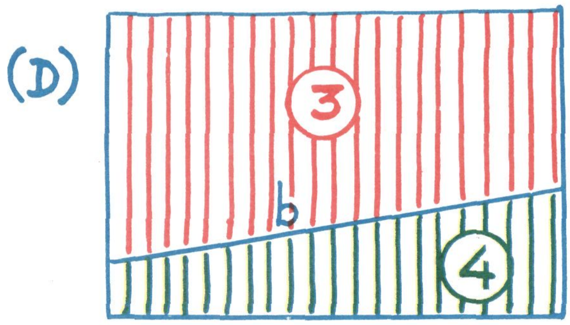
Beraz, $m \parallel n$ baldin badira, $m \cap n = \emptyset$

17.3. — Eman ditzagun **a** eta **b** zuzen paraleloak (D) lauean:

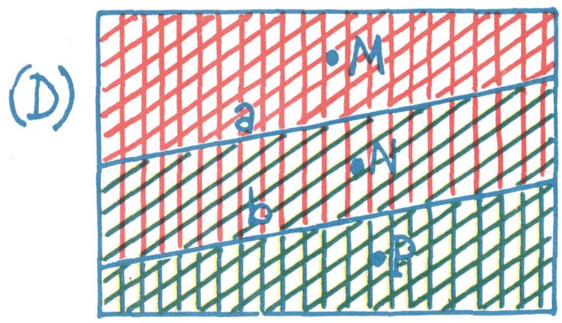


a zuzenak bi lauerditan zatitu du laua: 1 eta 2, gure marrazkian diagonal gorriz eta berdez margotuak.





Era berean, **b** zuzenak ere, bi laurdenetan zatitu du laua : '3' eta '4' eskualdeak, hemen zut gorriz eta berdez margotuak.



Bi zuzenok batera, beraz, honela zatitzen dute laua.

M puntuaz (eta dagokion eskualdeko beste edozeinetaz) hau idatz daiteke:

$M \in (1)$ $\qquad$ $M \in (3)$

Beraz, M-ren eskualdea $\underline{(1) \cap (3)}$

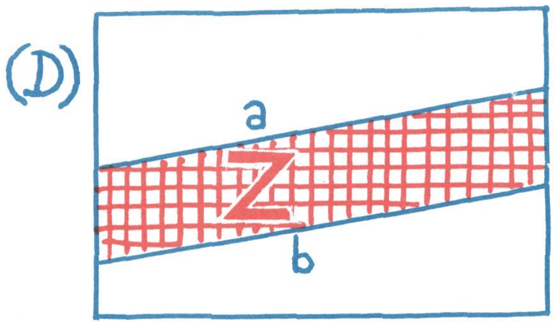
N puntuaz, bide beretik:

$N \in (2)$ $\qquad$ $N \in (3)$

Eta edozein N-z, $\underline{(2) \cap (3)}$

P puntuaz, berebat:

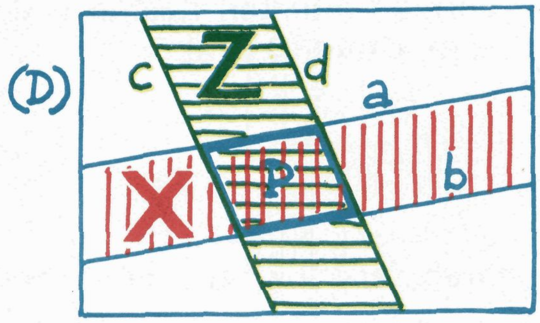
$\underline{(2) \cap (4)}$



Gorriz marratutako eskualdeari, beraz, **a** eta **b** paralelen artean mugatutakoari, ZERRENDA deritza; eta lauaren AZPI-MULTZO bat da:

$\underline{Z \subset (D)}$

17.4. — Bi zerrenda gurutzatzen direlarik, bi zerrenda horien ebaketa PARALELOGRAMO bat da:



X ∩ Z = paralelogramo

Paralelogramo horretako edozein puntu (P), batera da X zerrendakoa **eta** Z zerrendakoa.

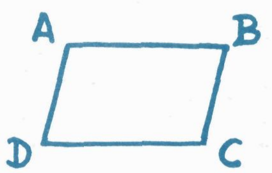
Paralelogramo bat, beraz, sortu duten bi zerrenden AZPI-MULTZO bat da:

$$P \subset X$$
$$P \subset Z$$

Paralelogramoa, beraz, bi modutara har daiteke:

a) Bi zerrendaren EBAKETA gisa;

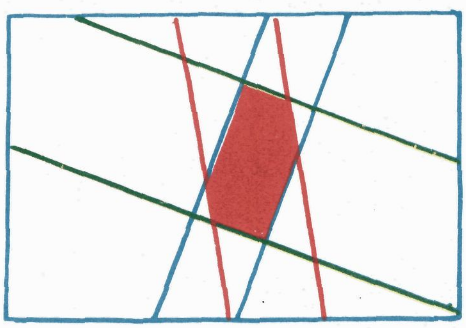
b) Lau zuzenki paraleloren arteko puntu- multzo gisa:



AB ∥ DC

AD ∥ BC

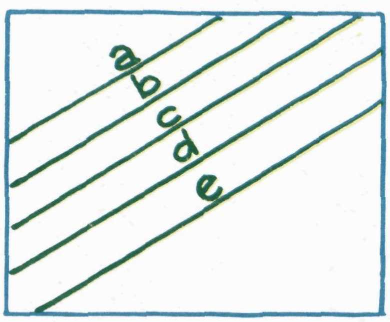
17.5. — Paralelogramo bat ebakitzen badu beste lau-zerrenda batek, hexagono bat lortzen da:



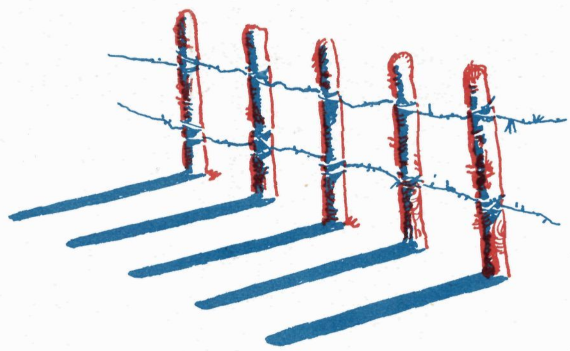
Hexagono honetako puntu-multzoa, beraz, paralelogramoari buruz azpimultzo bat da.

Bila itzazu poligono batzuk bide horretatik; alegia, zerrenda-ebaketak gero eta aurrerago eramanez.

17.6. — Ikus dezagun orain NORABIDEA zer den.

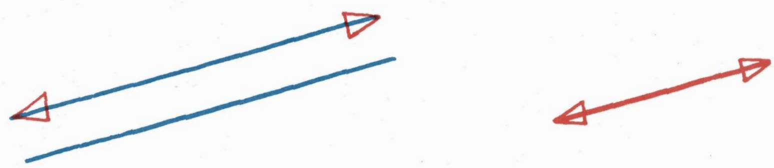


Eman ditzagun **a, b, c, d** eta **e** paralelak. Paralela honek NORABIDE bat markatzen du: zuzenak noruntz eta haruntz doana.

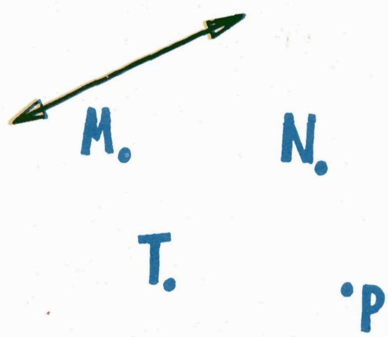


Arrats batez hesiko makilek sortzen dituzten itzalen multzoa, esate baterako.

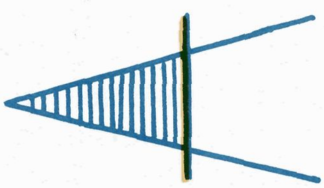
Norabide batek beti ditu BI sentidu: norabidean barrena honeraka edo haraka, honuntz edo haruntz:



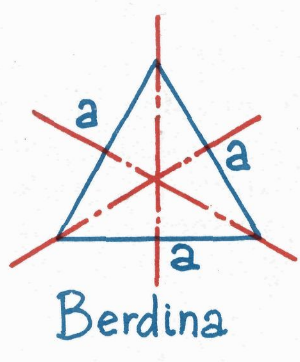
Marraz ezazu zuzenen mordoa **a** norabidearen arabera, eta zuzenak M-tik, N-tik, eta abar, igaro eraziz:



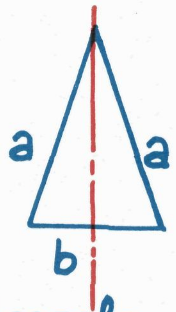
17.7. — Triangulua, era berean, angulu-eskualdearen azpi-multzo bat da:



Hiru motatakoa izan daiteke:

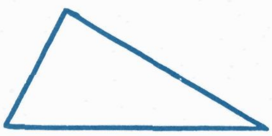


hiru anguluak berdinak
hiru aldeak berdinak
hiru simetria



Isozele

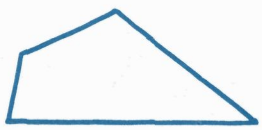
bi alde berdin
bi angulu berdin
simetri-ardatz bat



Eskaleno

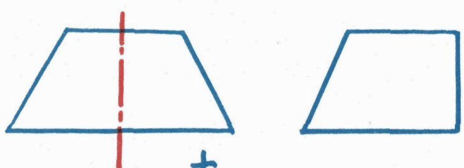
hiru aldeak desberdin
hiru anguluak desberdin
simetri-ardatzik ez

17.8. — Laukietan badira ere mota batzuk:



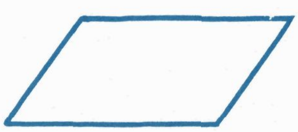
lauki eskuarra

inolako berdintasunik gabea



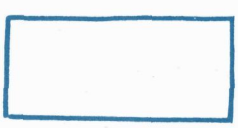
trapeza

bi alde paralelo (simetridunak edo gabeak)



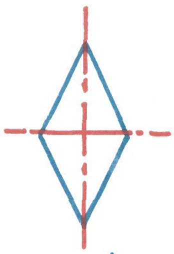
paralelogramo

aldeak bina paralelo

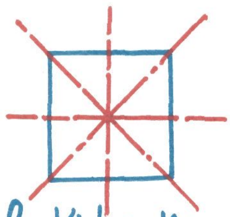


lauki zuzena

paralelogramoen mota bat
(azpi-multzo bat)

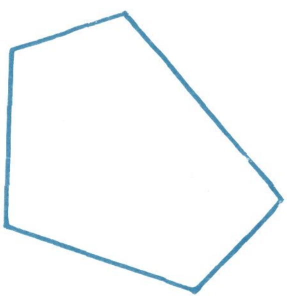


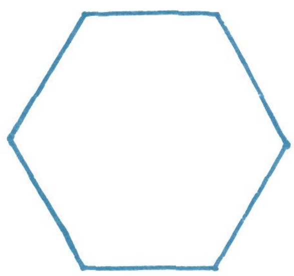
lau aldeak berdinak
anguluak binaka berdinak.

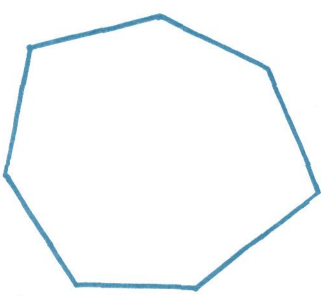


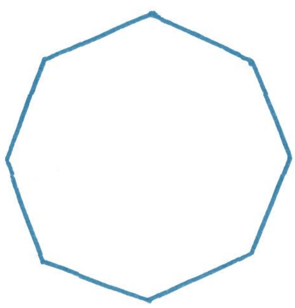
lauki berdinak:
lau aldeak berdinak
lau anguluak berdinak
(ronboetako bat da, hortaz)

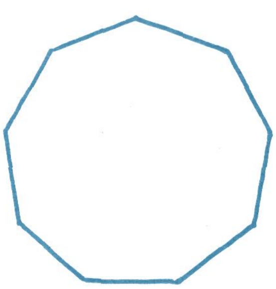
17.9. — Zuzenkien kopurua emendatu ala, hauek ditugu:

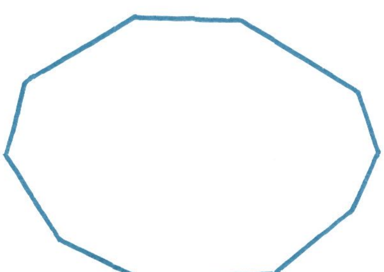












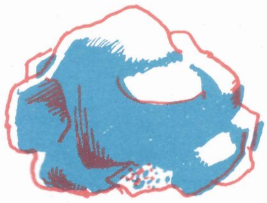
Aski da, beraz, 'gono' (= gr. erpin) hitzaren aurretik grekerazko ZENBAKI-izena jartzea:

zazpi erpin	=	hepta-gono
zortzi erpin	=	okto-gono
hamabi erpin	=	dodeka-gono

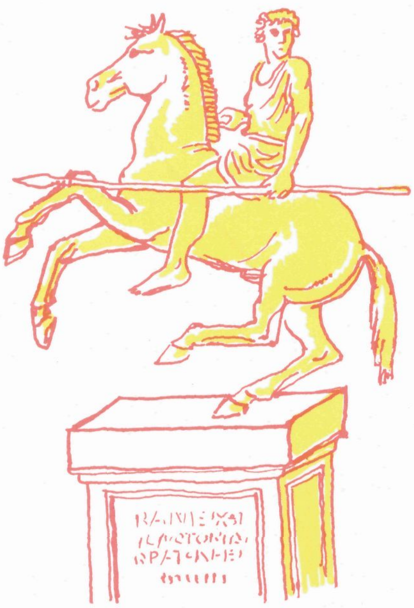
Poligono guztietan, jakina, BERDINAK berez daitezke denen multzoko azpi-multzo gisa.

18 — GEOMETRI-GORPUTZAK

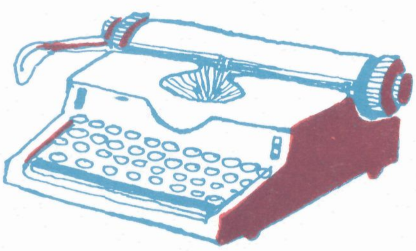
18.1. — Lekua hartzen duten gauzaki guztiak ez dira geometrikoak; baina geometri-gorputzek leku parte bat hartzen dute beti:



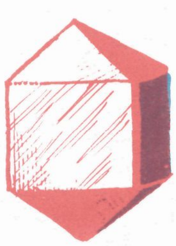
Harri honek, esate baterako, leku-gune bat betetzen du; baina haren azala ez da batere geometrikoa.



Brontzezko imajina honek lekugune apur bat hartzen du, eta geometrikoa ez da.

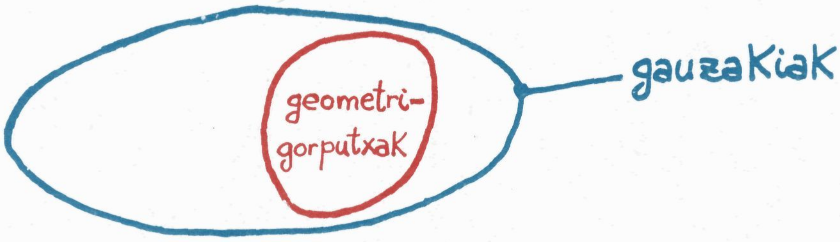


Idaz-makina honek lekugune bat betetzen du; baina ez da geometri-gorputz bat.



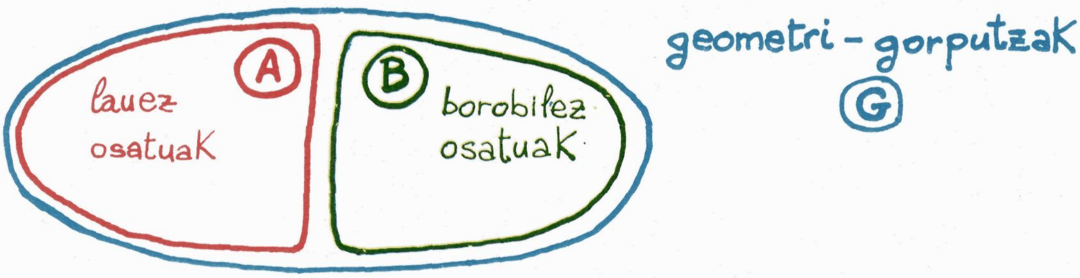
Kristal gorri hau, berriz, alde guztietatik trianguluz eta laukiz osatua, geometri-gorputza da.

Lekugune bat betetzen duten gorputz guztien multzo zabalean, horretara, geometri-gorputzak parte bat dira, azpi-multzo bat; eta hortaz:



$$\{\text{geometri gorputzak}\} \subset \{\text{gauzakiak}\}$$

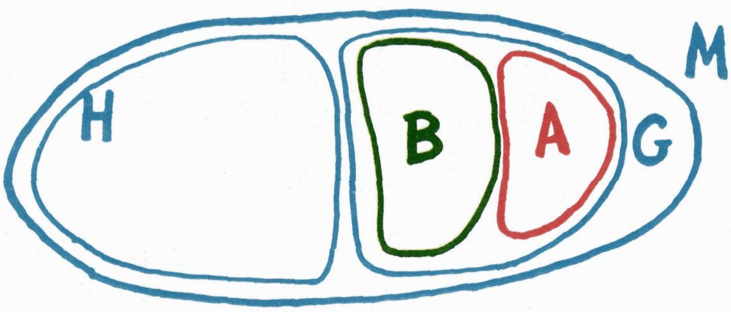
18.2. — Geometri-gorputzen artean, era berean, bi mota daude: **lauatalez** osatuta daudenak, batetik; eta **azal-borobilez** osatuta daudenak, bestetik:



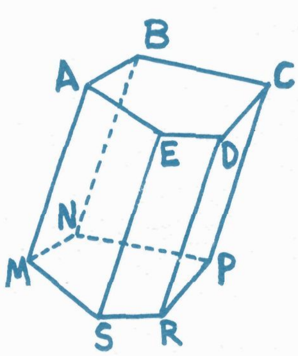
A multzoari POLIEDROEN multzo deritza; eta GORPUTZ BOROBIL B-koei.

$$A \cup B = G$$
$$A \subseteq G$$
$$A \subset G$$

Eta hortaz:



18.3. — Eman dezagun geometri-gorputz hau:

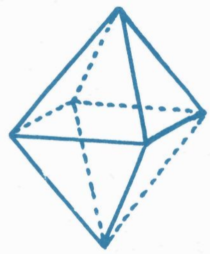


— A, B, C, ... poliedroaren ERPINAK dira (kasu honetan hamar)

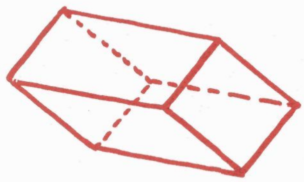
— AB, BC, AM, DR ... poliedroaren ERTZAK dira (kasu honetan 15)

— ABCDE, MNPRS, EDRS ... poliedroaren AURPEGIAK dira (honetan, 7).

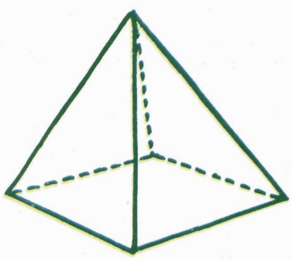
Poliedro hauek arretaz begiratuz, bila zazu, kasu bakoitzean, erpinen, ertzen eta aurpegien kopurua:



... erpin
... ertz
... aurpegi

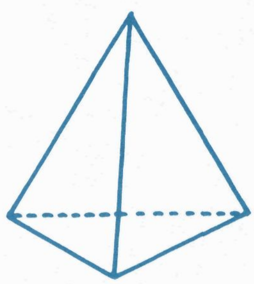


... erpin
... ertz
... aurpegi

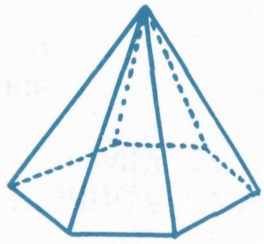


... erpin
... ertz
... aurpegi

18.4. — Oinarrizko poligono baten erpin bakoitza beste puntu batekin zuzenez lotzen badugu, PIRAMIDE bat lortzen dugu:

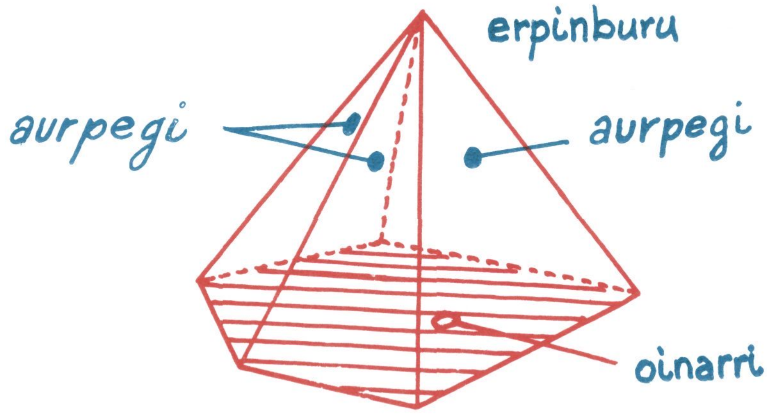


... erpin
... ertz
... aurpegi

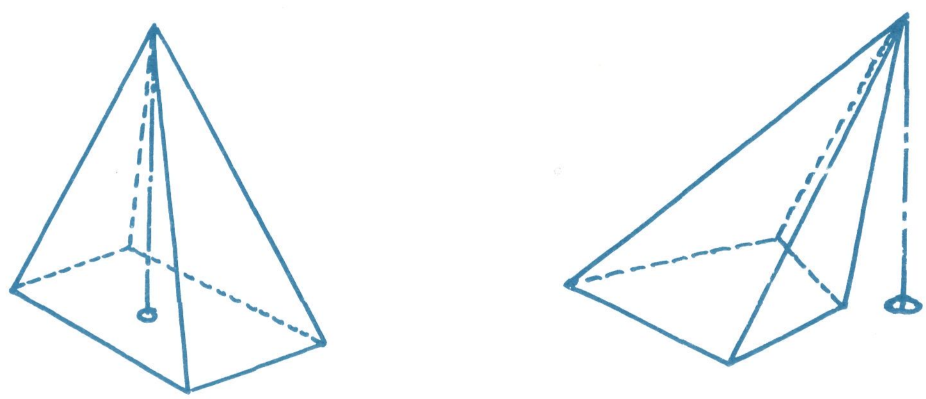


... erpin
... ertz
... aurpegi

Piramide baten aurpegiak (oinarria ezik) triangulu dira; eta triangulu guztiak biltzen diren puntuari ERPINBURU deritza:



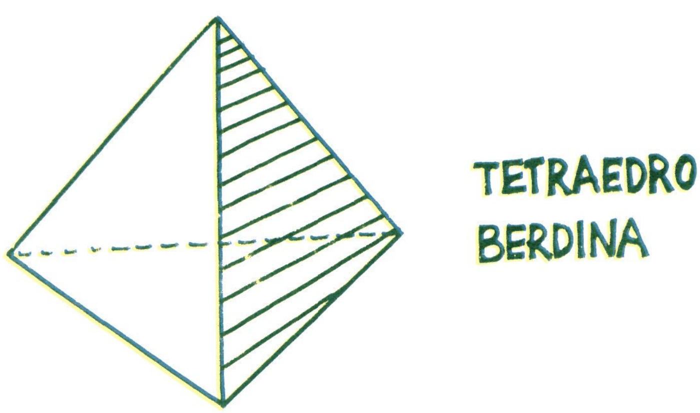
Piramideak zuzenak edo okerrak izan daitezke:



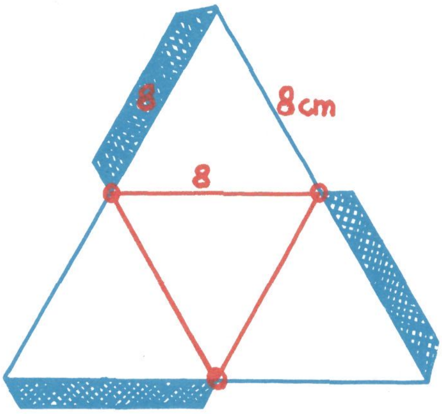
(erpinburutik jeisten den zutak, oinarriaren erdian ikutzen du)

(erpinburutik jeisten den zutak, ez du oinarriaren erdian ikutzen)

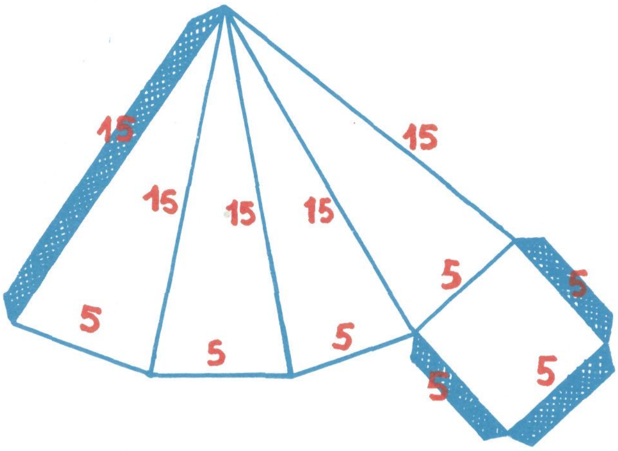
Izari bereko lau triangulu **berdinek** osatutako piramidea **TETRAEDRO BERDIN** deritza:



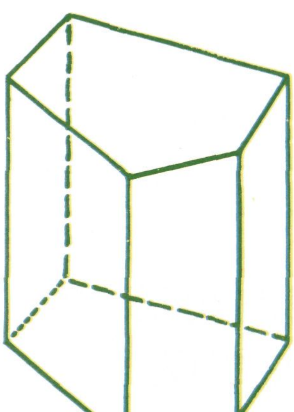
Eraiki zazu tetraedro berdin bat, ondoko eiteaz baliatuz:



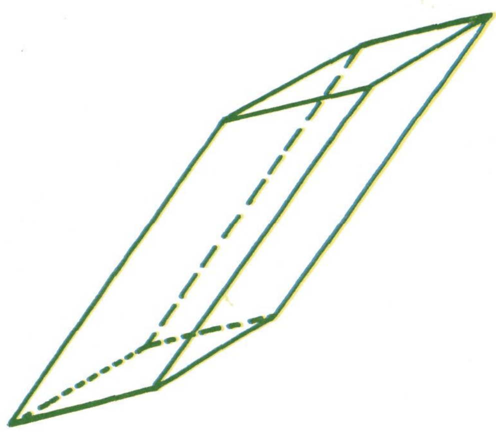
Molda zazu orain beste piramide hau:



18.5. — Beste poliedro-mota bat, oso ezaguna, PRISMA da. Oinarritzat BI POLIGONO ditu, eta saihetseko aurpegitzat PARALELOGRAMOAK:

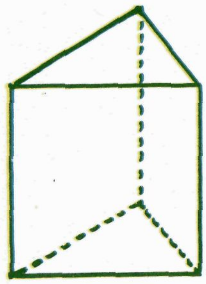


prisma zuzena
(aurpegiak lauki zuzenak)
dira)



prisma okerrak
(aurpegiak paralelogramoak
dira)

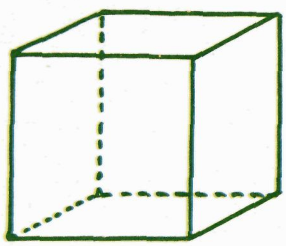
Prismarik errazenak BI TRIANGULU ditu oinarri:



... erpin
... ertz
... aurpegi

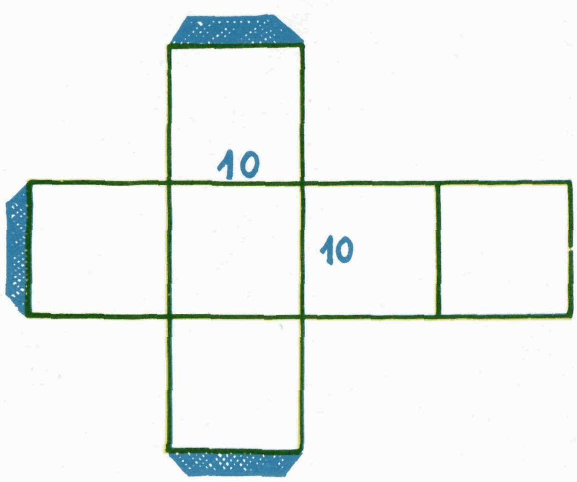
Prisma hau, beraz, «penta-edro» bat da (penta = 5).

SEI aurpegi dituzten prisma zuzenen arteko bat HEXAEDRO BERDINA da (hexa = 6; hexaedro = sei-aurpegi). Eskuarki KUBO deritza; eta izari bereko sei lauki berdinek osatzen dute:



... erpin
... ertz
... aurpegi

Osa zazu horietako bat ondoko marrazkian ematen diren neurriak baliatuz:



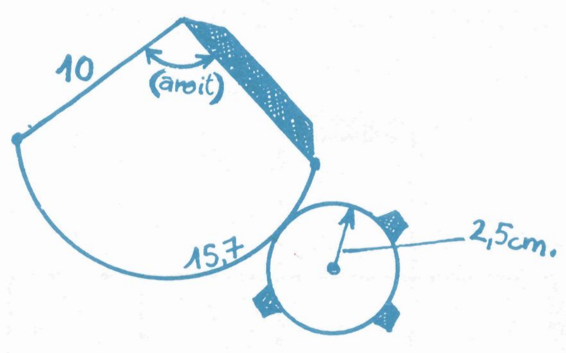
18.6. — Gogora ditzagun orain oinarrizko gorputz borobilak.

Iaz ikusi genuenez, zirkulu bat (oinarri) eta puntu bat (erpinburu) zuzenez lotzen baldin badira, ttutturru bat lortzen da (matematikazko hizkera teknikoan KONO deitua):

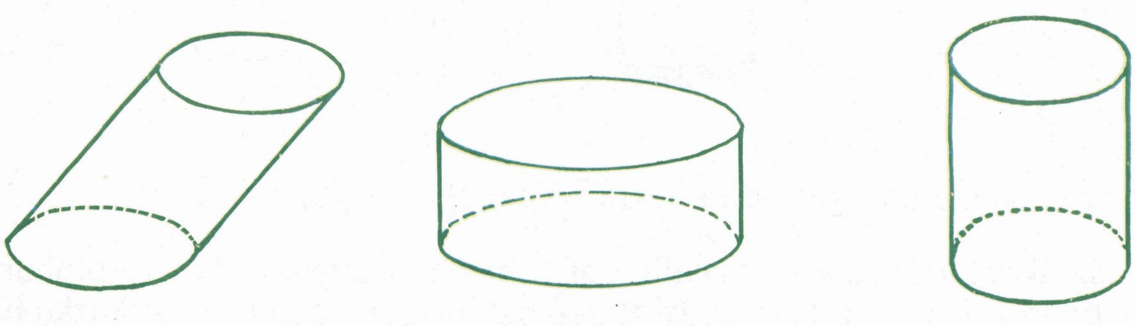
Ikus dezakezunez, kono batzuk zuzenak dira, eta beste batzuk okerrak:

Konoa eta piramidea antzekoak dira funtsean: oinarritzat 500 aldetako poligonoa lukeen piramideak, kono bat lirudike.

Molda zazu kono bat ondoko marrazki honetaz baliatuz:



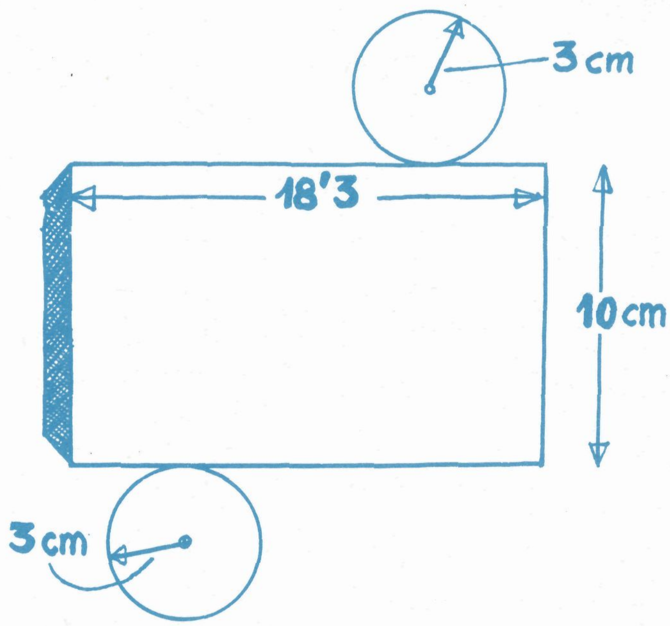
18.7. — Bi zirkulu hartu orain, eta biak zuzen paraleloz lotuz, ZILINDRO bat lortzen dugu:



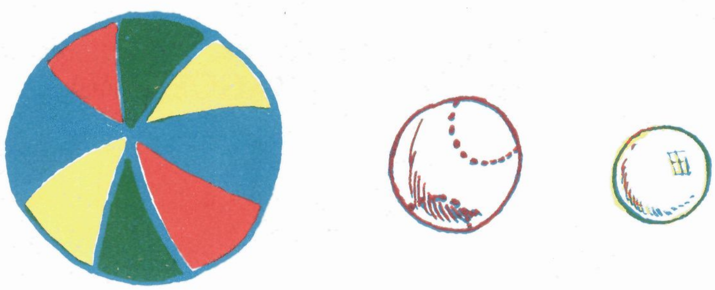
Zilindro batzuk zuzenak dira, eta beste batzuk okerrak:

Zilindroak eta prismak antzekoak dira funtsean: oinarritzat 500 aldetako bi poligono lituzkeen prismak, zilindro bat lirudike.

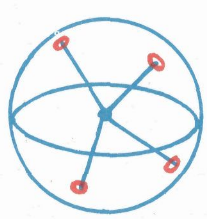
Molda zazu orain zilindro bat ondoko marrazkiaren bitartez:



18.8. — Baloiak, pilotak, pustarriak, ESFERAK dira:



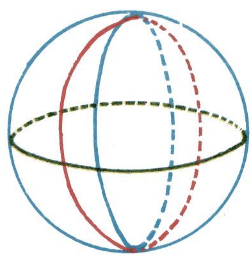
Esfera batetan, azaleko puntu guztietatik erdigunera tarte BERBERA dago; eta tarte bakar honi esferaren RADIO deritza.



r= radio

Funtsezko antza dute, beraz, zirkuluak eta esferak.

Aski duzu giltzari honen txanpona azkar-azkar jira araztea, eta esfera bat sortzen somatuko duzu.



Infinitu zirkuluz osatutako gorputz gisa agertzen zaigu esfera.

Ohar bat: Kartoin puska bat hartu, eta berehala moldatu ditugu prismak, piramideak, zilindroak, eta abar. Zergatik ez orain eman, beraz, esfera txukun bat moldatzeko marrazkirik?

Matematika gorenetan erakuts daitekeenez, kartoin puska batez eta bide horretatik esfera bat OSATZERIK EZ DAGOELAKO.

MATEMATIKA

LAUGAREN MAILA

ERRATUM

28 — Marrazkiaren gainean: «laukunetan»... LAUKUNEETAN.

31 — Goiko partean, hirugarren lerro-mordoan, «Beriz»... BERRIZ.

34 — Behereko irudian, «(barruan du)» ren azpian GEZI BAT behar da, fletxa bat alegia; eta ez marra bat.

35 — Goian, lehenengo lerroan: «adibedean»... ADIBIDEAN.

40 — 5.4 puntuan, bigarren lerro-mordoan, «baterako, elementutik»... ez da ezer; eta hau behar litzake «baterako, ● elementutik». Alegia, elementu hori zirkulu gorri bat baita.

47 — Bigarren lerro-mordoan: «ditagun»... DITZAGUN.

76 — Laugarren baketan, koma bat falta da: **0 , + 1 = 1**

77 — behereko irudian gurutze urdin bat falta da, bi borobil gorrien eskuinaldean.

116 : 13.4, **0,38** horrek koma goian dauka, eta ez beherean.

117 : goiko irudiaren gezia OKER dago; bistan baita 1,32 0,0132-ri dagokiola; eta ez, irudian agertu denez, 0,26/0,0132.

136 : irudia ez dator testoarekin batera: (1)KONKORRA, (2) AHURRA. Hots, irudian alderantziz datoz.

150 : «oneagono» (beherean) = ENEAGONO.

153 : goiko irudian: «gorputxak» = GORPUTZAK.