Aljebra berria

KARLOS SANTAMARIA'K

ALJEBRA berria dalakoak jainko andia du gaurko egunean. Zenbait sailletan, Zibernetikan adibidez, bear bearrezkoa da, eta bestetan, Fisico-Kimikan bezela, pauso bat ere ezin egin diteke berri orren laguntzarik gabe.

Areago, naiz ta matematikatik urrun irudi, giza-zienzia batzuek, soziologia ta politikologiak, esate baterako, matematika erreminta gero ta geiago erabiltzen dute. Linguistikan ere bai, aljebra berriaren jokabideak erabiltzen asi dira dirudienez azpalditxo ontan.

Zenbait pedagogo ospatsuak matematika berriaren ikuskerak sartu nai dituzte irakaskintzan, joera onek erreztasun andia emango dielakoan ikasleei, gaurko zienzi ta tenika ondo egosteko.

Orixe uste det nik. Nere iritziz jokabide berriak ikasleei zail xamar iruditzen bazaizkie ere lenengo unean, gerokoan oso onurazkoak izango dituzte, Matematika saillean arkitzen diran eragospenak garaitu ahal ditzaten.

Matematika berria euskal ikastoletan asi bear da irakasten, nere ustez. Orain, euskerazko liburuak gertatzen ari direla-orañarte guztiz urriak izan ditugu zoritxarrez-errezagoa izango degu jakintza berriari jotzea. (Azkenekoak lenengoak izango dira).

Ortarako, alde guzietan bezela, eragospenik andiena irakasleen eskastasuna da, oraindik gaurko matematikaren berririk ez dakiten irakasleak geienak diralako.

Bañan, arira joanik, galdera bat egingo digu bateon batek. Aljebra berri famatua zer da edo zertan datza bere mamia?

Galde oni dagokion erantzuna ematerik, ez degu ontan, jakiña. Nolanai ere zer edo zer esango diogu irakurle jakinaiari.

Gauza bat argitzea komeni da alde aurretik, ots, aljebra berria zenbakietan bakarrik aritzen eztala, beste gauza askotan baizik.

Bere mugak lojika formalakin eztira oso ondo xedatuak eta Matematika deitzen deguna Matematika edo Lojika Matematika deitu bearko genuke batzutan.

Orañarte matematikaren eginkizunik andienak zenbatzea ta neurritzea ziran. Irugarren aburu bat ezartzen zaio orain Matematikari, au da, gauzetako barruko organizaziñoa edo estrutura agertzea ta aztertzea.

Errelitatea nun nai eta beti eratuta agertzen zaigu. Izan guztiak beren egitura dute, bakoitzaren elementoak lotu ta elkartzen dituana.

Edozein izkuntzetan, adibidez, itzak eztira agertzen batere loturarik gabe, zurtz ta bakarrak. Badituzte ordea beren arteko ariak, eta ari abek egitura bat josten diote iztegiari. Izkuntza bat ezta bakarrik itz moltzo bat, iztegi soil bat, iztegia bere egiturakin baizik. Itzak ta beren arteko sarea.

Moltzo batek bere elementoak ditu. Elementoen arteko *elkarbideak* garrantzi andia dute, moltzoa antolatzen, tajutzen, moldatzen ta eratzen dutelako (*). Elkarbideari esker moltzoa ezta bakarrik moltzo soil bat, *egitura* bat baizik.

Egitura izango da beraz, elkarbide-sare bat daukan moltzoa.

Derrigorrezkoa degu une ontan adibide bat ematea.

Baldin mai gañean oñetako bat, lore bat ta ogi puska bat jartzen baditugu, iru gauza oiek moltzo bat osatuko dute, ezin uka, ez berriz *egitura* bat, moltzo aitatuak ez bait du batere antolarik.

(*) «Elkarbide» izenarekin Matematikan «relación» deritzana esan nai degu.

Senide diran iru persona ikusten baditugu berriz, irurak egitura bat osatzen dutela esango degu, eta ondo esan, bere elementoen artean dauden elkarbideak, egituratasuna ematen bait diote moltzo orri. (Begira iduriak).

Eman dezagun iru persona oiek Mikel, Koxme ta Peru dituztela izenak. Lau egoera ezberdiñak agertuko ditugu. Lenengo idurian irurak anai diranik ematen degu. Ikusten danez, beren artean elkarbide bat dago, «anaitasuna» deituko deguna, alegia. Elkarbide ori T izkiakin itxuratuko degu. Era berean, iru anaiak Mikel, Koxme ta Peru, *m, k* ta *p* izkiekin itxuratuko ditugu, bakoitzari buruz. Eta onela idatziko degu.

mTk au da, «Mikel, Koxme'n anai da»

kTm au da, «Koxme, Mikelen anai da»

eta abar, onelako formulak sei bait dira guztian.

Sei elkarki oiek, egoera ontako artu-eman guztiak azaltzen dituzte, anaitasunari buruz beintzat.

Anaitasun-elkarbideak bi propiedade ditu. Lenengoa da *simetría* deitzen deguna (4). Bigarren egokitasuna da erderaz «transitividad» deitzen zaiona eta nik emen «*aldakoitasuna*» esango diodana.

Simetria onela azaltzen da

$$x \ T \ y \rightarrow y \ T \ x$$

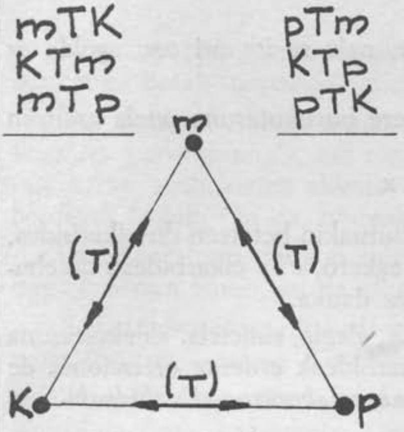
eta irakurri: «Baldin *x, y*'ren anai bada, *y, x*'ren anai dala esan dezakegu».

Aldakoitasuna onela azaltzen da.

$$x \ T \ y \text{ eta } y \ T \ z \rightarrow x \ T \ z$$

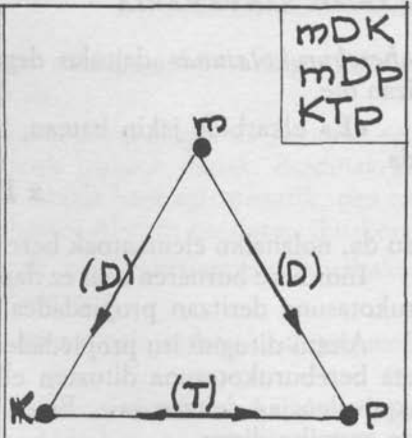
eta irakurri: «Baldin *x, y*'ren anai bada eta *y, z*'ren anai bada, *x, z*'ren anai dala esan dezakegu».

Anaitasunak ez du betetzen, berriz, beste propiedadea, oso garrantzi andikoa dana. Erderaz «reflexividad» deitzen zaio eta emen



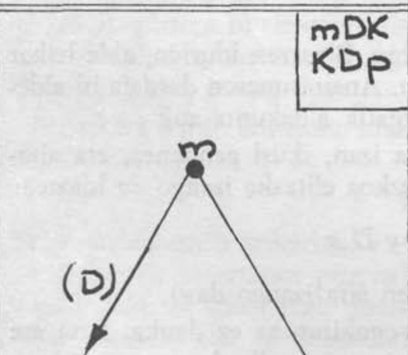
Iru Anai

1.º Iduria



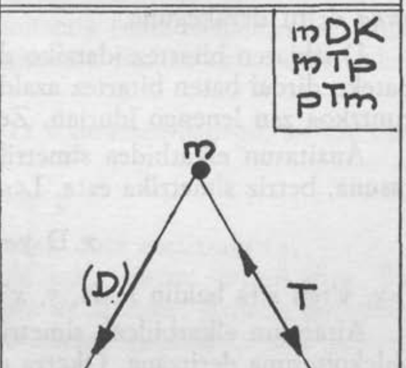
Aita ta bi seme

2.º Iduria



Aitona, aita ta semea

3.º Iduria



Aita, seme ta osaba

4.º Iduria

«*bereburukotasuna*» deituko degu, naiz ta itz ori oso egokia ez izan ote.

«E» elkarbide jakin batean, bere burukotasuna onela azaltzen da,

$$x \; E \; x$$

au da, nolanaiko elementoak bere buruakin betetzen du elkarbidea.

Iñor bere buruaren anai ez dan ezkero, «T» elkarbideak bereburukotasuna deritzan propiedadea ez dauka.

Aitatu ditugun iru propiedadeak, alegia, simetria, aldakoitasuna eta bereburukotasuna dituzten elkarbideak erderaz «relaciones de equivalencia» deitzen zaie. Emen «*bezelakotasun-elkarbideak*» izena ezarriko diegu.

Argi da, beraz, anaitasuna bezelakotasuna-elkarbide bat ez dala.

Goazen orain bigarren egoerara. Kasu ontan Mikel, Koxme ta Peruren aita da. Elkarbide berri bat agertzen zaigu, beraz, *aitatasuna* deitu dezakeguna.

D izkiaren bitartez idatziko degu. Bigarren idurian, alde bakar bateko dirdai baten bitartez azaldu. Anaitasunaren dardaia bi alderuntzkoa zan lenengo idurian. Zergatik aldakuntz au?

Anaitasun elkarbidea simetrika izan, ikusi genuenez, eta aitatasuna, berriz simetrika ezta. Legezkoa elitzake izango au idaztea:

$$x \; D \; y \rightarrow y \; D \; x$$

(«*x*, *y*'ren aita baldin bada, *y*, *x*'ren aita izango da»)

Aitatasun elkarbideak simetria-egokitasuna ez dauka. Ezta ere aldekoitasuna deritzana. Okerra da urrengo elkarketa

$$x \; D \; y \quad \text{eta} \quad y \; D \; z \rightarrow x \; D \; z$$

ots, «*x* ,*y*'ren aita baldin bada, eta *y*, *z*'ren aita baldin bada, *x*, *z*' ren aita dala esango ahal degu». Au esatea astokeri izugarria izango litzake. Itz batean, anaitasun simetrika eta aldekoia ezta, ezta ere bereburukoa.

Irugarren ta laugarren egoeretan ez degu geiago ekingo, iduriak begiratzea berak ulertzeko naikoa da.

Oar dezagun adibide ontan agertu ditugun egoera guzietan egilleak iru persona zirala, eta moltzoak irukoak danak. Berdiñak ziran, beraz, senbakiaren aldetik, ez berriz bere egituragatik, oso ezberdiñak baizik. Ori da, besteak beste, Aljebra berriaren ikuskera.

Oneraño aitatu ditugun egiturak, bere egituratasuna itur bakar batetik artzen zuten, au da elkarbidetatik.

Bañan beste iturririk badago, operazioak, ariketak, alegia, moltzoari egitura ezartzen diotenak.

Zenbakistian, ariketa batzuek ikasten dira. Batuketa eta bere itzulizkoa dana, kenduketa. Gero, bidarketa, «multiplicación» erderaz esaten diotena, eta zatiketa, naiz ondargabea naiz ondarduna.

Bañan aljebra berrian ariketak oso zabalagoak dira, ez bakarrik zenbakiekin, baizik mota guzietako gauzaekin egiten diralako.

Multzo baten bi elemento bakoitzetik beste elemento bat, nolanaiko jokabidez, sorrerazi ahal degunean, multzo ortan ariketa bat definitu degula esaten degu.

Ariketa bat, * ikurraren bitartez itxuratzen badegu, au idatziko degu

$$a * b = c$$

Eta esan «a eta b arikariak, c ematen dute emaitzatzat».

Ariketak aztertzean propiedade asko aintzat artzen dira. Badaude ariketan simetrikak diren eta ez direnak. Ariketa bat *simetrika* izatea au da: bi nolanaiko elemento emanda, *a* ta *b* deitzen ditugunak, au gertatzen da

$$a * b = b * a$$

Batuketa arruntak, adibidez, egokitasun au dauka. Ez, berriz, izkuntza batean, itz-batuketan.

era + ibilli = erabilli
ibilli + era = ibillera.

Bi emaitzak ezberdiñak dira, agiri.

Amaika batuketa dira simetrikak ez direnak.

Elkargaitasuna edo «asociatividad» da beste propiedade garrantzikoa. Bera onela azaltzen da. Iru nolanaiko elemento a, b, c emanda, au gertatzen da

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Batuketa arruntak, esate baterako, gaitasun au dauka, adibide ontan ikusten danez:

$$(3 + 5) + 4 = 3 + (5 + 4)$$

Ez berriz itzen arteko esan degun batuketan, ondoko ikasbideak adiarazten duan bezela:

(ibilli + era) + egin = ibillera egin
Ibilli + (era + egin) = ibilli eragin.

Moltzo batean ariketa bat edo batzuek xedatuak diranean, moltzoari egitura bat ezartzen diote. Baita baliteke ere moltzo baten egitura elkarbide batzuetatik, eta batera, ariketa batzuetatik etorri zekizkiola. Adibidez, zenbaki osoen moltzo-egitura oñarri oietatikakoa da.

Bi ariketa dauzka (batuketa ta bidarketa) baita «orden»-eko, deitzen zaion elkarbidea.

Arimetika arruntan bertan ariketa klasikoak ez dira bakarrak. Batuketa arrunta ezta bakarra, beste modu asko bai dago ere zenbakiak batutzeko.

«Zer? Bi eta iru eztira beti bost izango?» —norbaitek galdetuko du izan oi dan ezkero. Ez, bi eta iru bat egitea bai gertatzen da noizean bein.

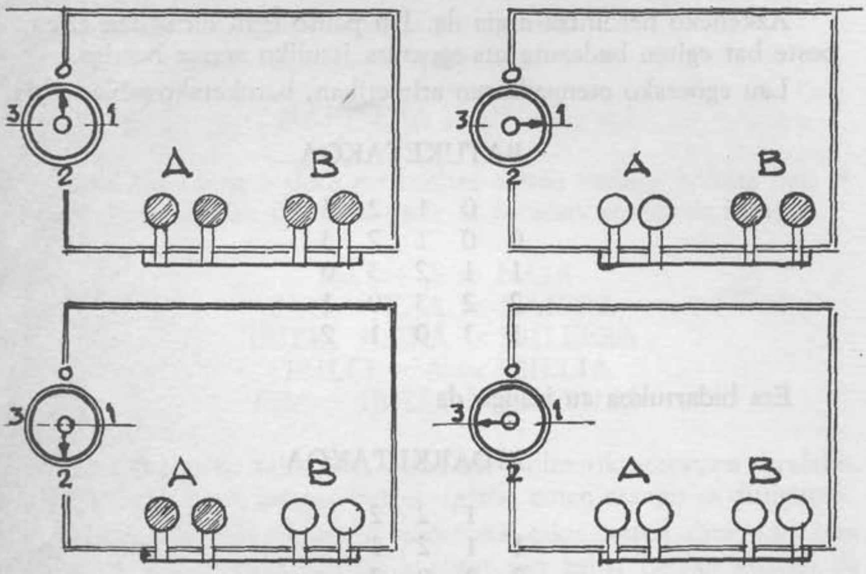
Adibide errez bat emango degu.

Erderaz «llave o interruptor de varios tiempos» esaten diotena guztiak esagutzen dute. (Beg. 5 garren iduria).

Maratilla lenengo egoeran (au da uts-egoeran) dagonean ezta ezer gertatzen, eta argirik ez.

Mugimendu bat, ots, bultz txiki bat jotzen badiozute, bigarren egoerara igaroko da maratilla, ta argi talde bat (idurian A izkiz

5'gn. iduria



agertzen dana, izan ere) pixtuko da. Beste jokadatxo ta irugarren egoeran izango da etengaillua. Lenengo argi-taldea itzali ta beste bat, B izenekoa, pixtuko da orain.

Urrengo mugimenduan argi guztiak pixtuko dira batean, jakiña. Beste pauso bat oraindik egiten badegu, azkeneko egoeran, edo obe esan, lenengo egoeran, uts-egoeran, berriz izango gera: dana itzali ta ibiltzea bukatuta.

Galdetu dezaiegun orain gure buruei, egoera batzuetako etengaillu onen *arimetika* nolakoa da? Nolakoa da ontako batuketa? Ez oiturazkoa.

Arimetika «berri» ontan ondorengo berdintzak idatziko ditugu:

$$1 + 1 = 2$$
$$2 + 1 = 3$$
$$3 + 1 = 0$$

Azkeneko berdintza argia da. Iru pauso egin dituzuten ezkero beste bat egiten badezute uts-egoerara itzuliko zerate berriro.

Lau egoerako etengailluren arimetikan, batuketako-tabla au da

BATUKETAKOA

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Eta bidartukoa au izango da

BIDARKETAKOA

	1	2	2
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

irakurleak berak egiztatuko duan bezela.

Ikusten dezutenez orrelako batuketaren bitartez, 0, 1, 2, 3 zenbakiak ematen dituzten emaitzak, beti oien arteko zenbakiak dira, ots, emaitza ezta moltzo kanpora ateratzen. Taldean bertan gelditzen da beti emaitza.

Beraz { 0, 1, 2, 3, } moltzoa *talde* bat dala esango degu alegia, erderaz *grupo* esaten zaiona.

Baldin moltzo bat ariketa bat badu eta ariketa onen emaitzak ez badira iñoiz moltzo bertatik ateratzen, moltzoari, *taldea* esaten zaio. Besteak beste —gai onek ingurumari asko bearko luke ta— ori da *taldea.*

Oar zazute moltzo berori { 0, 1, 2, 3 } zenbakisti arrontzen aldetik ezta talde bat, ontan 2 + 3 = 5 dalako, eta beraz emaitza (5 dana) moltzo kanpotik ateratzen dalako.

Beste adibide aitatzeko, urrengo itzak

{ NAI ; ÉRA ; IBILLI ; A }

moltzo bat osatzen dute eta moltzo ontan badago ariketa bat, + ikurrakin itxuratu ditekena (naiz ta osotoro xeatua ez izan)

NAI + A = NAIA
NAI + ERA = NAIERA
IBILLI + ERA = IBILLERA
IBILLI + A = IBILLIA
ERA + IBILLI = ERABILLI

Moltzo ori ez da talde bat, emaitzak moltzotik ateratzen diralako, eta, gañera, beste arrazoi batzuetagatik, emen esango ez ditugunak.

Etengaillurena bezelako arimetika asko izaten dira edo izan ditezke. Matematika berria ikuspegi oso zabal batean jartzen da ta izan ditezken arimetika ta aljebra guztien oñarriak ematen dizkigu. Gero jakintza bakoitzak bere saillean dagokion zenbakistia ezartzerik izango du.

Idazki trakets au bukatzeko, zerbait bibliografia ematea komeni izango da, emen esandako asi-ideiak irakurle batzuei sail au obe ezagutzeko jakin-naia ernarazi zezaietela bait liteke.

Uste det irakurle geienak gai au soziolojiaren ta politikolojiaren aldetik begiratuko dutela. Abek oso liburu erreza ta oso ondo egiña dute «L'Algèbre Moderne» izenekoan, «Que sais-je?» sortan ageria dana. Matematika zaleak beste liburuak ori baiño sakonagoak arkituko dituzte, adibidez, «Arithmetique et Algèbre modernes» Albert Chatelet'ek egin ta «Presses Universitaires» argitaratutakoa.

Irakaskintzan daudenak oso onurazkoak izango dituzte «Chantiers Mathématiques» izeneko liburuak (Ministère de l'Education Nationale Français argitaratzaille). Oietan bertan Télévision Scolaire dalakoan matematika berriari buruz emandako itzaldiak arki ditzakete.

Azkenean, politika ta soziologian lan egiten dutenak, bi liburu ikusi bearko lituzkete. Biak «Dunod» argiratzailleak sortutakoak. Bere izena, «Les Mathématiques modernes dans la pratique des affaires» eta «Algèbre moderne et activités humaines».

Karlos SANTAMARIA